Département STPI
1^{ere} année
2^{nd} semestre
UV5

MECANIQUE du POINT

Année universitaire 2009-2010

Walter Escoffier

Dernière mise à jour : 7 mai 2010

Ouvrages recomandés

- E. Hecht, **Physique**, ITP DeBoeck Université (1999)
- H. Beson, **Physique 1 mécanique**, DeBoeck Université (1999)
- E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Aïm & N. Piccioli, **La physique en FAC, Mécanique 1^{ere} et 2eme année**, EdiScience-Dunod (2003)
- J. Cipriani & H. Hasmonay, **Mécanique et énergie**, Librairie Vuibert (1997)
- J.P. Faroux & J. Renault, **Mécanique 1**, Dunod , 4^{me} édition (1996)
- Alonso & Finn, **Physique Générale 1, mécanique et thermodynamique**, InterEditions, 2nd édition (1994)
- J. Bergua & P. Goulley, **Résoudre un problème de mécanique**, Bréal, (1996)
- E. Klein, **L'unité de la physique**, PUF (2000)

Comment appréhender le cours de mécanique ?

- Travaillez régulièrement (!)
- Ne *jamais* apprendre une formule "par coeur" et essayer de l'appliquer aux problèmes rencontrés. D'abord, il faut comprendre la démonstration d'une "formule", puis savoir la redémontrer... Ainsi vous l'aurez comprise, donc apprise !
- Dans la mesure du possible, préparer les exercices de TD *avant* de venir en TD
- Le cours et les TDs ne suffisent pas pour comprendre la mécanique : empruntez et lisez des livres de la Bib'INSA !
- Entrainez-vous, faites des exercices autres que ceux des TDs

Quelques règles à savoir...

- Le module de mécanique du point est sanctionné par deux examens. Un examen à mi-parcours, de coefficient 1/4 et de 30 minutes, aura lieu pendant le mois de Mars. Un examen final de coefficient 3/4 et de deux heures aura lieu pendant le mois de Mai. Une seule session de rattrapage sera organisée après l'examen final. L'examen de rattrapage durera deux heures et comptera pour un coefficient de 3/4. Il s'adresse aux étudiants ayant justifié leur absence **à l'une ou l'autre** des sessions d'examen auprès du STPI. Les étudiants qui n'auront pas justifié leur absence recevront automatiquement la note minimale et ne seront pas autorisé à suivre l'examen de rattrapage.
- Le module de mécanique du point comprend 7 cours magistraux, 11 séances de travaux dirigés et une séance d'APP.
- La séance d'APP est obligatoire. Les absences ou les retards significatifs seront sanctionnés jusqu'à -1 point sur la note **finale** de l'UV.
- L'ensemble des documents sont disponibles sur Moodle. Le fascicule de cours sera disponible "chapitre par chapitre", après que le chapitre en question ait été totalement traité en cours. Ne négligez pas le fascicule de cours : il contient des informations importantes qui seront (peut-être) pas traitées en cours en fonction de l'avancement de ce dernier. Il constitue aussi une excellente base de révision.
- La correction des annales sera disponible sur Moodle quelques semaines avant les examens.

Table des matières

Introduction : Présentation générale de la mécanique

La mécanique classique

La mécanique classique permet d'appréhender la plupart des phénomènes physiques de la vie courante. Elle permet, par exemple, de prévoir la trajectoire d'une voiture ou le vol d'un avion, de calculer la stabilité et la robustesse des bâtiments, ou encore d'expliquer les sons émis par la vibration des cordes d'un violon. Elle explique aussi la manière avec laquelle évoluent les planètes de notre système solaire, le mouvement relatif de la terre par rapport au soleil, levant ainsi le voile sur l'origine du jour, de la nuit et des saisons. Bien sûr, la mécanique classique n'a pas été construite en un jour : plusieurs siècles et de nombreux scientifiques (N. Copernic, T. Brahe, G. Galilee, R. Descartes, I. Newton, J.L. Lagrange etc...) se sont succédés afin de rendre mature cette théorie. Celle-ci repose principalement sur la notion de "force"... Nous faisons couramment appel à notre sens commun pour interpréter ce que sont les "forces" : par exemple, celui qui "possède" de la force est capable de déplacer facilement des objets massifs, ou bien peut appliquer des contraintes importantes sur la matière. Intuitivement, nous pensons aussi que la force est à l'origine du mouvement : on ne peut pas déplacer une brouette sans la pousser, c'est à dire sans lui appliquer une force ! En mécanique classique, la nature intrinsèque d'une force n'est pas explicitement décrite : elle n'intervient en rien dans la prédiction des phénomènes mécaniques. Que ce soit une force dite magnétique, de gravitation, de frottement ou électrique, peu nous importe... du moment que nous savons comment la prendre en compte d'un point de vue mathématique ! La "force" est une sensation que l'on peut ressentir, mesurer, mais que l'on ne cherche pas à explorer intimement dans le cadre de la mécanique classique. En ce sens, cette théorie est quelque peu "phénoménologique". Certains prétendent qu'elle est intuitive... C'est vrai pour ceux qui la maitrisent, cela l'est en revanche beaucoup moins pour ceux qui la découvrent !

L'équation maitresse de la mécanique classique, la relation fondamentale de la dynamique ($\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$), relie la somme vectorielle des forces appliquées sur un objet à son accélération. Mais que signifie exactement cette notion ? Bien que nous en ressentons tous les jours ses effets, nous ne sommes, finalement, pas habitués à les expliquer en terme d'accélération. De plus, nous commettons souvent l'erreur de confondre "accélération" et "vitesse" : un concept plus accessible avec lequel nous sommes très familier. L'accélération est définie comme la dérivée première de la vitesse par rapport au temps (ou encore la dérivée seconde de la position par rapport au temps) : elle permet de décrire des "variations de vitesse". A travers la relation $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$, la force résultante est donc proportionnelle à l'accélération d'un objet. Comme déjà mentionné précédement, beaucoup pensent que les forces sont à l'origine du "mouvement". Mais si tel était le cas, cette idée serait en contradiction avec notre sens commun : ne dit-on pas en effet qu'une voiture, roulant à vitesse constante, est en mouvement ? Puisque sa vitesse est constante, alors son accélération est nulle... ainsi la somme des forces auxquelles elle est soumise est nulle... donc, la voiture n'est pas en mouvement ! En général, ce type de "faux" paradoxe est lié à une erreur de définition : chacun de nous possède sa propre interprétation de notions *a priori* simples telles que la "vitesse", "l'accélération" et le "mouvement"... Or une théorie digne de ce nom doit reposer sur des bases solides, où chaque mot, chaque principe, possède une sens précis et universel.

Si on considère que le mouvement est simplement un "déplacement dans l'espace", alors les forces ne sont pas à l'origine du mouvement. Le mouvement est déjà partout autour de nous, en vertu du principe de relativité [1] introduit pour la première fois par Galilée. Dans un train en marche, les passagers sont immobiles par rapport au train, mais il se déplacent par rapport au sol de la terre, qui elle-même tourne autour du soleil... Finalement, tout est en mouvement par rapport à tout ! L'accélération (et donc la force) sert simplement à *modifier* le mouvement d'un corps, notamment en changeant sa vitesse ! Mais la encore un problème subsiste : considérons par exemple le mouvement circulaire [2] de la lune autour de la terre. Sa vitesse ne change pas au cours du temps, pourtant nous savons pertinemment qu'il s'exerce sur la lune une force de gravitation due à la proximité de la terre. Or s'il existe une force, il existe forcement une accélération... mais alors, la vitesse de la lune ne doit-elle pas changer ? En fait, l'accélération n'est donc pas simplement une "variation de vitesse". Elle est, en réalité, "une variation du *vecteur* vitesse". La direction du mouvement (et ses variations) devient une notion importante. Dire qu'un objet n'est pas accéléré, cela signifie que ni sa direction, ni sa vitesse ne change au cours du temps.

Pour les néophytes, ce dernier résultat peut sembler relativement contre-intuitif. Il illustre pourtant le fait que la

1. Le principe de relativité (à ne pas confondre avec la "théorie de la relativité") exprime le fait que les lois physiques doivent être les mêmes dans tous les référentiels se déplaçant en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic
2. en réalité, le mouvement est elliptique... !

mécanique classique doit être avant tout comprise "en profondeur" pour pouvoir l'appliquer correctement. L'héritage que nous laisse Sir Isaac Newton, tout son génie exprimé à travers une relation de trois lettres seulement $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$ mérite d'être médité pleinement. Il s'agit là, entre autre, d'un des objectifs principal de ce cours. Terminons cette introduction en précisant que la mécanique classique n'est pas une théorie obsolète. Les concepts de base qui la constituent se retrouvent dans quasiment toutes les branches de la physique moderne. Les "opérateurs" [3] de la mécanique quantique, par exemple, ont été construits à partir de leurs homologues classiques. Nous n'étudierons, dans le cadre de ce cours, que la "mécanique du point". La mécanique du solide (c'est à dire l'étude d'un ensemble de points formant un solide) ne sera pas discutée.

La mécanique relativiste

A la fin du XIX^{eme} siècle, l'homme pensait dominer la physique dans sa globalité. D'une part il maitrisait les concepts de la mécanique classique, et d'autre part il avait su relier les branches a priori différentes de l'optique et de l'électromagnétisme (J.C. Maxwell). Il possédait ainsi deux grandes théories capables d'expliquer (presque) l'ensemble de tous les phénomènes physiques observés jusqu'alors. Mais il subsistait un problème majeur : ces deux grandes théories étaient incompatibles l'une avec l'autre : en mécanique classique, la vitesse d'un objet est relative au référentiel dans lequel l'observateur décide de l'étudier [4], tandis que la vitesse de la lumière, quand à elle, ne dépend pas de la vitesse de sa source [5]. La lumière serait-elle un objet "différent" des autres ? Doit-elle être traitée "à part" ? Cette remarque n'était pas acceptable pour certains physiciens, qui considéraient alors la lumière comme une onde, faisant forcement vibrer un milieu "matériel" : l'éther.

L'une des plus grandes réalisations d'Albert Einstein fut d'une part, de supprimer la notion d'éther (qui posait plus de problème qu'elle n'en résolvait) et d'autre part de proposer une nouvelle théorie physique selon laquelle le temps n'est plus un paramètre dans les équations du mouvement, mais une coordonnée au même titre que les coordonnées spatiales x, y, z.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ t \end{pmatrix}$$

La théorie de la relativité restreinte était née, dans laquelle le temps subissait aussi une transformation par changement de référentiel (transformation de Lorentz). La découverte de la relativité restreinte changea radicalement la manière d'appréhender notre univers et permis "d'unifier" la mécanique et l'électromagnétisme. La mécanique classique devait-elle être dès alors abandonnée au profit de cette nouvelle théorie ? Pas forcement : la mécanique classique est, finalement, une approximation très précise de la mécanique relativiste lorsque les vitesses mises en jeu sont très inférieures à celle de la lumière ; ce qui est le cas dans la plupart des phénomènes physiques rencontrés dans la vie courante.

La mécanique quantique

A mesure que la science progressait, de nouveaux phénomènes physiques étaient sans cesse découverts, dont certains ne pouvaient être expliqués avec les théories existantes (effet photoélectrique par exemple). Il fallait découvrir les propriétés intrinsèques de la matière, l'origine microscopique de certains processus physiques au sein même de la matière. La découverte de l'électron (J. J. Thomson - 1897), des noyaux atomiques (E. Rutherford - 1911), l'interprétation de N. Bohr de l'atome ainsi que de nombreuses autres expériences pionnières indiquèrent peu a peu que la mécanique classique ne pouvait plus être appliquée aux objets microscopiques. Une nouvelle théorie allait ainsi voir le jour : la mécanique quantique.

Le formalisme de la mécanique quantique est radicalement différent de celui de la mécanique classique (bien que les concepts de vitesse, de l'impulsion etc... soient construits à partir de leurs homologues classiques). Les particules sont représentées par une expression mathématique (dite "fonction d'onde") a partir de laquelle l'ensemble de ses propriétés peuvent être retrouvées par l'application "d'opérateurs" mathématiques (exemples : l'opérateur "vitesse", l'opérateur "probabilité de présence" etc...). La fonction d'onde proprement dite est obtenue à partir d'une équation, dite "équation de Schrödinger". La mécanique quantique est loin d'être une invention "purement théorique" et au delà de toute application pratique : la chimie physique, les supra-conducteurs, les lasers, la physique des semi-conducteurs ne sont que quelques exemples d'applications bien concrètes de la mécanique quantique, sans laquelle le monde ne serait pas ce qu'il est actuellement.

Quelle est la relation entre la mécanique classique et la mécanique quantique ? L'une est-elle l'approximation de l'autre ? Comment passe-ton d'une description microscopique à une description macroscopique des phénomènes physiques ? Cette

3. C'est à dire, en termes simples, des outils mathématiques propres à la mécanique quantique permettant d'obtenir des grandeurs physiques mesurables à partir de la fonction d'onde

4. voir chapitre 2

5. Expérience de Morley-Michelson

thématique fait encore l'objet d'études théoriques et expérimentales à ce jour, mais il semblerait qu'une analyse statistique des résultats prédits par la mécanique quantique, associé au concept de "décohérence", puissent reproduire les prédictions de la mécanique classique.

Récapitulatif et domaine de validité des théories présentées

Relativité restreinte

- Coordonnées d'espace et de temps sont liées : espace et temps sont indissociables

- La relativité restreinte s'applique pour tous les objets macroscopiques, loin des forts champs de gravitation. Les écarts théoriques sur les mesures de longueurs et de durée avec ce que prédit la mécanique de Newton ne sont significatifs que lorsque les vitesses entre objets ou observateurs en mouvements relatifs deviennent proches de la vitesse limite C. Du fait de son aspect peu intuitif et de la complexité des calculs, la relativité restreinte se limite essentiellement aux cas ou des vitesses proches de la lumière sont obtenues, ou lorsque les mesures effectuées exigent une précision telle que les écarts avec la dynamique newtonienne deviennent significatifs.

- Sans la prise en compte des effets de relativité, la précision des systèmes de positionnement par satellite GPS et Galileo resterait inférieure à la dizaine de kilomètre, empêchant toute application utile telles que la localisation routière, les futurs systèmes de localisation et d'aide à l'atterrissage de la navigation aérienne etc...

- Une présentation de la relativité restreinte (7h) est donnée dans le MO de 3^{eme} année STPI "parlez-moi d'astrophysique"

Mécanique classique ou mécanique Newtonienne

- La cinématique newtonienne s'applique pour tous les observateurs à la quasi totalité des objets macroscopiques de notre vie de tous les jours, pour des applications industrielles ou grand public.

- La cinématique newtonienne est fondée sur votre intuition du monde, elle fonde votre connaissance et votre action sur le monde qui vous entoure

- Une approximation de la théorie de la relativité restreinte valable lorsque les vitesses mises en jeu sont très inférieures à la célérité

- Poursuite de l'approfondissement des connaissance dans les années à venir dans diverses formations de votre INSA (mécanique des solides déformables et indéformables, physique des dispositifs, mécanique des fluides etc...)

Mécanique quantique

- La mécanique quantique est la seule à décrire les résultats de l'expérience pour les objets matériels de taille nanoscopique (de l'ordre du nanomètre) dont les vitesses restent "non relativistes". Du fait du non-déterminisme de la loi d'évolution, on ne peut pas définir une notion de "trajectoire" entre deux mesures de positions pour un "corps" donné.

- Elle seule permet d'expliquer des phénomènes observés macroscopiquement, mais relatifs à des corpuscules de tailles microscopiques : émission lumineuse, microscopie électronique etc...

- Les applications de la mécanique quantique sont extrêmement nombreuses dans l'environnement technologique de ce début de XXI ème siècle. Citons simplement comme application déjà largement répandue dans le domaine grand public : les transistors et le laser. En absence de découverte des lois de la mécanique quantique, l'informatique actuelle et les moyens de stockage/lecture de l'information n'existeraient pas.

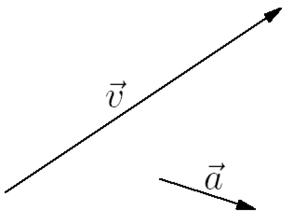
- Découverte en 3^{me} année MIC-IMACS, puis de façon opérationnelle en 3^{eme} année IMACS option GP, puis au département de physique.

Mécanique quantique relativiste...

Notons enfin que, lorsque l'on étudie le comportement d'objets microscopiques dont la vitesse est proche de celle de la lumière, on utilise la mécanique quantique relativiste, formée par la réunion des deux théories précédemment introduites et dont l'équation maitresse est dite : "équation de Dirac". Cette théorie est très utilisée en physique des particules ou en astrophysique.

Analyse vectorielle

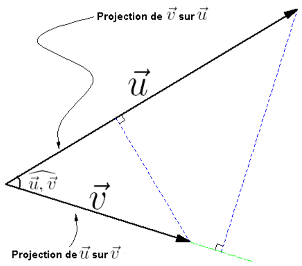
Vecteurs



Les vecteurs sont des objets mathématiques ayant trois caractéristiques : une norme, une direction et un sens. Dans l'espace de dimensions ≤ 3, ils sont représentés graphiquement par des segments de droites dont la longueur est proportionnelle à leur **norme**, et par une flèche indiquant leur direction et leur sens. Par exemple, la vitesse ou l'accélération d'un point M peuvent être représentées par des vecteurs. Notez cependant que, *bien que toutes les deux soient des vecteurs, ces quantités expriment des grandeurs physiques très différentes l'une de l'autre (la norme de ces vecteurs, respectivement la vitesse et l'accélération n'ont d'ailleurs pas la même unité !)*. Aussi, dans la figure ci-contre, dire que "l'accélération du point M est plus grande que sa vitesse" n'a strictement aucun sens ! Ces deux notions ne pouvant pas être comparées l'une à l'autre, il existe nécessairement une "échelle" différente reliant la longueur géométrique des vecteurs à leur norme pour chaque grandeur physique. L'écriture mathématique des vecteurs dépend de la base (repère) choisie. Dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé {Ox, Oy, Oz}, un vecteur quelconque $\vec{v}$ se note : $\vec{v} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$ ou encore $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ici, {x,y et z} sont les coordonnées du vecteur tandis que $\{\vec{e_x},\ \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}\}$ sont les vecteurs de base du repère choisi. La norme d'un vecteur $\vec{v}$ se note $||\vec{v}||$. Dans l'espace à 3 dimensions on a : $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. C'est une grandeur toujours positive. Notez que, mathématiquement parlant, un vecteur n'a pas de "point d'accroche" dans l'espace et il serait plus judicieux d'utiliser les notations $\{\Delta x,\ \Delta y$ et $\Delta z\}$ plutôt que {x,y et z} pour les coordonnées des vecteurs. En mécanique, il n'est pas "nécessaire" de donner à chaque vecteur un point d'accroche, mais ceci peut favoriser la compréhension de certains problèmes (Ex : point d'application des forces).

Produit scalaire

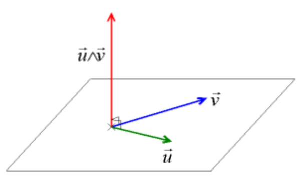


Le produit scalaire est une opération mathématique construite à partir de deux *vecteurs*, et produisant un *scalaire*. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note : $\vec{u}.\vec{v}$. Graphiquement, le produit scalaire correspond au produit de la norme du vecteur $\vec{v}$ avec la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$, ou inversement. Il vient : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$. Le produit scalaire est :

- commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ - distributif : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Le produit scalaire peut aussi être calculé a partir des coordonnées des vecteurs :
soit $\vec{u} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$ et $\vec{v} = d.\vec{e_x} + e.\vec{e_y} + f.\vec{e_z}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = a.d + b.e + c.f$

Produit vectoriel



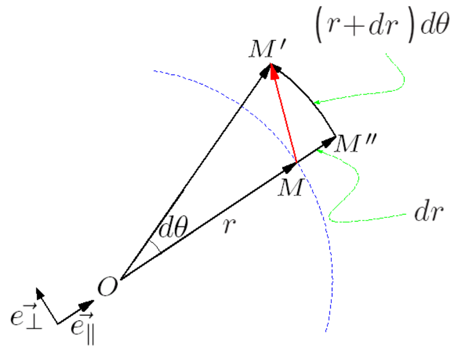
Le produit vectoriel est une opération mathématique en dimension 3 construite à partir de deux *vecteurs*, et produisant un autre *vecteur*. Le vecteur résultant est orthogonal au plan formé par les vecteurs donnés. Graphiquement, le produit vectoriel est construit à l'aide de "la règle de la main droite". On a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \times \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{||\vec{u}\wedge\vec{v}||}$. Le produit scalaire est :

- anti-commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ - distributif : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Le produit vectoriel peut aussi être calcule à partir des coordonnées des vecteurs :
soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} b.f - c.e \\ c.d - a.f \\ a.e - b.d \end{pmatrix}$

Dérivée d'un vecteur par rapport au temps

La dérivée d'un vecteur par rapport au temps est encore un vecteur, et est construite de la même manière que pour une fonction scalaire :



$$\frac{d}{dt}\left(\vec{OM}\right) = \lim_{t'\to t}\left(\frac{\vec{OM'}_{(t')} - \vec{OM}_{(t)}}{dt}\right)$$

où $\vec{OM}$ et $\vec{OM'}$ sont des vecteurs au temps t et t' respectivement, avec $dt = (t'-t) \to 0$. Ici nous considérons le cas général dans lequel le vecteur $\vec{OM}$ a pu, pendant le temps dt, à la fois s'allonger d'une distance dr et "tourner" d'un angle $d\theta$. La quantité dr (dû uniquement au changement de la norme de $\vec{OM}$) est dirigée selon un vecteur unitaire colinéaire au vecteur $\vec{OM}$ - nous notons ce vecteur $\vec{e_\parallel}$. Dans la limite où les temps t et t' sont très voisins, l'arc de cercle $(M''M')$ (dû à la rotation uniquement du vecteur $\vec{OM}$) est égal à $(r+dr)d\theta$, et sa direction pointe selon un vecteur unitaire tangent à l'arc de cercle, donc perpendiculaire à $\vec{OM}$ - nous notons ce vecteur $\vec{e_\perp}$. il vient donc :

$$d(\vec{OM}) = \vec{OM'} - \vec{OM} = \vec{MO} + \vec{OM'} = \vec{MM'} = \vec{MM''} + \vec{M''M'} = dr\ \vec{e_\parallel} + (r+dr)d\theta\ \vec{e_\perp} = dr\ \vec{e_\parallel} + (r.d\theta + \underbrace{drd\theta}_{\text{négligeable}})\ \vec{e_\perp}$$

$$\text{Ainsi...}\ \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}\right) = \frac{dr}{dt}.\vec{e_\parallel} + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\perp} \qquad (1)$$

Dans le cas ou l'on considère la dérivée par rapport au temps d'un vecteur dont la norme ne change jamais (par exemple un vecteur unitaire, de norme 1), on a $dr = 0$ et on montre que le vecteur dérivé par rapport au temps est perpendiculaire au vecteur donné. Une autre démonstration, plus élégante peut être proposée. Soit un vecteur unitaire $\vec{e_T}$, on a :

$||\vec{e_T}|| = 1 \quad$ soit $\quad \vec{e_T}.\vec{e_T} = 1$

$\frac{d}{dt}\left(\vec{e_T}.\vec{e_T}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{e_T}).\vec{e_T} + \vec{e_T}.\frac{d}{dt}(\vec{e_T}) = 2\vec{e_T}.\frac{d}{dt}(\vec{e_T}) = 0$

le produit scalaire entre $\vec{e_T}$ et son vecteur dérivé $\frac{d}{dt}(\vec{e_T})$ est nul...

donc $\quad \frac{d}{dt}(\vec{e_T}) \perp \vec{e_T} \qquad$ (c.q.f.d.)

La dérivation d'un vecteur peut aussi être réalisée directement à partir de son expression analytique. Considérons le vecteur suivant : $\vec{v}_{(t)} = A_{(t)}.\vec{e_x} + B_{(t)}.\vec{u}_{(t)}$. Ce vecteur est exprimé dans la base des vecteurs *unitaires* $\{\vec{e_x}, \vec{u}_{(t)}\}$ où $\vec{e_x}$ est "fixe", mais $\vec{u}_{(t)}$ dépend du temps (rotation seulement car le vecteur est unitaire). Les coordonnées $A_{(t)}$ et $B_{(t)}$ dépendent elles aussi du temps, par exemple $A(t) = t^2$ et $B(t) = 4t$. Les "règles" relatives à la dérivation d'éléments vectoriels sont les mêmes que celles d'une fonction scalaire :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{(t)}\right) &= \left(\frac{dA_{(t)}}{dt}.\vec{e_x} + A_{(t)}.\frac{d}{dt}\left(\vec{e_x}\right)\right) + \left(\frac{dB_{(t)}}{dt}.\vec{u}_{(t)} + B_{(t)}.\frac{d}{dt}\left(\vec{u}_{(t)}\right)\right) \\
&= \left(\frac{dA_{(t)}}{dt}.\vec{e_x} + \vec{0}\right) + \left(\frac{dB_{(t)}}{dt}.\vec{u}_{(t)} + B_{(t)}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}^{\perp}_{(t)}\right) \\
&= 2t.\vec{e_x} + 4.\vec{u}_{(t)} + 4t.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}^{\perp}_{(t)}
\end{aligned}$$

où $\vec{u}^{\perp}_{(t)}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}_{(t)}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire du vecteur tournant $\vec{u}_{(t)}$

Homogénéité des relations vectorielles

Les objets mathématiques de base de la mécanique (position, vitesse, accélération, forces, moments etc...) sont quasiment tous vectoriel. Vous allez donc devoir vous habituer au formalisme vectoriel pour effectuer les différents calculs demandés. Aussi, chaque fois que vous obtiendrez un résultat, une relation, une équation, *posez-vous toujours la question de savoir si votre résultat est "homogène"*. Une quantité vectorielle doit être égale à un vecteur, une quantité scalaire doit être égale à un scalaire !

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}.\vec{e_N}$ *CORRECT* $\qquad ||\vec{a}|| = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}.\vec{e_N}$ *INCORRECT*

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}$ *INCORRECT* $\qquad a = \frac{dv}{dt}.\vec{e_T} + \frac{v^2}{R}.\vec{e_N}$ *INCORRECT*

Chapitre 1

Cinématique

La cinématique permet de décrire de manière générale l'évolution d'un mobile (un point ou un ensemble de points) au cours du temps, sans s'intéresser aux causes du mouvement. Pour ceci, des concepts essentiels sont introduits tel que "le vecteur vitesse", "la notion de référentiel", "le moment cinétique" et bien d'autres... La cinématique repose sur des principes physiques permettant de relier mathématiquement et/ou conceptuellement toutes ces notions.

1.1 Quelques définitions

1.1.1 L'observateur

L'observateur est un être qui a conscience de l'écoulement du temps, fléché du passé vers le futur, et qui perçoit l'existence d'objets indépendants de lui-même, localisés dans l'espace et pouvant se déplacer au cours de temps.

1.1.2 Notion de référentiel

Un référentiel est un système d'axes de coordonnées, liés à un observateur muni d'une horloge. La notion de mouvement n'a pas de caractère absolu mais est relative au référentiel par rapport auquel il est décrit. En effet, deux observateurs placés dans deux référentiels en mouvement relatif décriront de façon différentes le mouvement d'un même point de l'espace.

1.1.3 Une classe de référentiels particuliers : les référentiels "galiléens"

Les référentiels galiléens sont les référentiels animes d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est au barycentre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines dites "étoiles fixes" (Livre JP-Faroux).

Il est difficile de saisir la notion de référentiel galiléen avant d'introduire les concepts de changement de référentiels (chapitre 2). En pratique, un référentiel sera considéré comme galiléen si, dans ce dernier et pour un temps d'observation donné, le mouvement d'un mobile n'étant soumis à aucune force extérieure est rectiligne et de vitesse constante.

1.1.4 Notion de repère de temps

Un repère de temps (O', t) est constitué d'un point d'origine O' du temps, et d'un vecteur $\vec{s}$ selon l'axe du temps. Tout évènement observé à un instant τ donné par un observateur est daté. Ainsi, à tout instant τ l'observateur peut associer un nombre réel tel que : $\vec{O'\tau} = t.\vec{s}$. En mécanique classique, le temps est considéré comme un paramètre du mouvement et sera de ce fait, plutôt représenté par un **scalaire**.

1.1.5 Notion de point matériel

Il s'agit d'un point géométrique associé à un système de corps dont la position est parfaitement déterminée par la donnée de trois coordonnées (dans l'espace à trois dimensions) et d'un paramètre temporel. En pratique on "modélisera" un corps quelconque par un son centre de gravité (un point) auquel est associé toute la masse du corps en question. Dans certains cas, cette approximation est trop grossière et ne peut pas correctement décrire le mouvement réel d'un corps. C'est le cas par exemple des corps déformables, ou de grande dimensions devant les variations de potentiel auxquels ils sont soumis, ou encore des corps de dimensions très petites (électrons) délocalisés.

1.1.6 Repère et coordonnées

Pour tout observateur, 3 coordonnées suffisent à positionner un point dans l'espace (à 3 dimensions). Le repère d'espace permet d'introduire la notion de coordonnées. Il est constitué d'un point origine O et d'une base de trois vecteurs non colinéaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un repère d'espace orthonormé est un repère d'espace tels que les 3 vecteurs de base associés sont orthogonaux 2 a 2 et de norme unité. En général, on distingue trois repères d'espace usuels : le repère **cartésien**, le repère **cylindrique** et le repère **sphérique**.

Repère cartésien

Le repère cartésien est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires "fixes" dans le référentiel choisi. Les trois vecteurs unitaires $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ déterminent les trois directions usuelles de l'espace $\{[Ox),\ [Oy),\ [Oz)\}$. La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées (x, y, z). Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} \quad = \quad x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Les trois vecteurs unitaires du repère cartésien sont "fixes" dans le référentiel d'observation. On dit aussi qu'ils sont "liés" au référentiel. En d'autres termes, cela signifie que ni la **norme**, ni la **direction**, ni le **sens** de ces vecteurs unitaires ne changent au cours du temps.

Repère cylindrique

Le repère cylindrique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ dont un $(\vec{e_z})$ est "fixe" dans le référentiel choisi tandis que les deux autres $(\vec{e_\rho}\ et\ \vec{e_\theta})$ sont "variables". La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées $(\rho,\ \theta\ z)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Remarque 1 : nous verrons dans le chapitre suivant que le vecteur $\vec{e_\theta}$ est utilisé pour exprimer, entre autre, la vitesse et l'accélération d'un point matériel.

Remarque 2 : le repère polaire, à deux dimensions, se déduit du repère cylindrique en supprimant la troisième composante de l'espace représentée par le vecteur $\vec{e_z}$. Les vecteurs de base sont $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$ et le vecteur $\vec{OM}$ s'écrit simplement : $\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho}$

Remarque 3 : Nous verrons par la suite que les vecteurs $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ peuvent être exprimés en fonction des vecteurs du repère cartésien $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$. Cette opération est utile dans la démonstration de certaines relations, mais devra être évitée lorsque l'on travaille dans le repère cylindrique.

Repère sphérique

Le repère sphérique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$, tous sont "variables" dans le référentiel choisi. La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées $(r,\ \theta,\ \phi)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = r.\vec{e_r} \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

Remarque 1 : nous verrons dans le chapitre suivant que les vecteurs $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ sont utilisés pour exprimer, entre autre, la vitesse et l'accélération d'un point matériel.

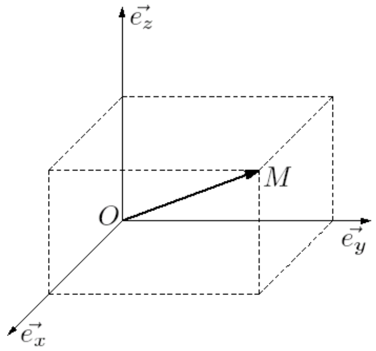
Remarque 2 : Nous verrons par la suite que les vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ peuvent être exprimés en fonction des vecteurs du repère cartésien $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$. Cette opération est utile dans la démonstration de certaines relations, mais devra être évitée lorsque l'on travaille dans le repère sphérique.

ATTENTION : Il ne faut pas confondre les concepts de *référentiel* et de *repère d'espace*. Dans un référentiel donné, le *même* mouvement d'un mobile peut être décrit en utilisant des repères d'espace différents. Par contre le mouvement d'un mobile ne sera pas le même suivant le référentiel dans lequel l'observateur se situe.

1.1.7 La notion de trajectoire

La trajectoire d'un point matériel constitue l'ensemble des positions de l'espace que ce dernier occupe en fonction du temps. La trajectoire est parfaitement définie lorsque l'on connait explicitement l'évolution temporelle de toutes les coordonnées du vecteur position $\vec{OM}$. Autrement dit, à chaque "valeur" du temps t, il est possible d'associer une position du point M dans l'espace, repéré par ses coordonnées. Bien que la définition de la trajectoire nous semble intuitif, rappelons que celle-ci n'existe plus dans le cadre de la mécanique quantique...

1.2 Cinématique dans le repère cartésien



1.2.1 Expression du vecteur position

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit simplement :

$$\boxed{\vec{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}}$$

1.2.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Le vecteur "déplacement" $\vec{\Delta\ell}$ est obtenu logiquement en soustrayant la position du point M' au temps t' à celle du point M au temps t (avec $t' > t$). On a : $\vec{\Delta\ell} = \vec{OM'} - \vec{OM}$. La définition du vecteur "déplacement élémentaire" $\vec{d\ell}$ est similaire à celle du vecteur "déplacement", mais cette fois-ci les temps t et t' sont très proches de sorte que $t' - t \to 0$. On a alors : $\vec{d\ell} = \lim_{(t'-t)\to 0}\left[\vec{OM'} - \vec{OM}\right]$. Mathématiquement, cela revient à **différencier** l'expression de $\vec{OM}$. Il vient :

$$\vec{d\ell} = d\vec{OM} = (dx.\vec{e_x} + x.d\vec{e_x}) + (dy.\vec{e_y} + y.d\vec{e_y}) + (dz.\vec{e_z} + z.d\vec{e_z})$$

Dans le repère cartésien, les vecteurs de base sont "fixes" par rapport au référentiel choisi, cela revient à dire qu'ils n'évoluent pas au cours du temps, ou bien qu'ils n'ont aucun déplacement élémentaire soit : $d\vec{e_x} = 0, d\vec{e_y} = 0, d\vec{e_z} = 0$,. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\vec{d\ell} = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z} \qquad (1.4)}$$

1.2.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur "déplacement élémentaire" : $\vec{v} = \frac{\vec{d\ell}}{dt}$.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}.\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{x}.\vec{e_x} + \dot{y}.\vec{e_y} + \dot{z}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad (1.5)}$$

1.2.4 Expression du vecteur accélération

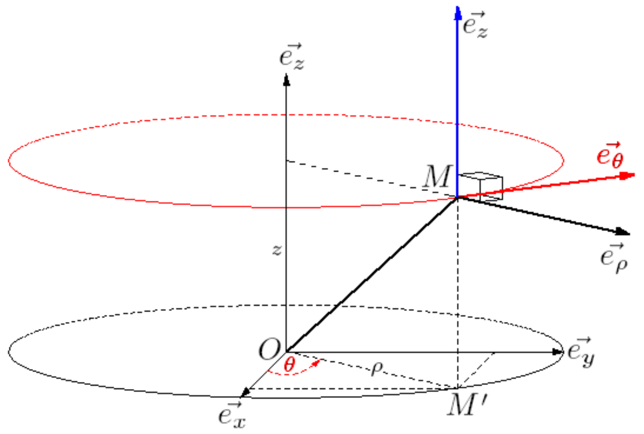
Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Il vient : $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{dx}{dt}.\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right)$. De la même manière que précédemment, les vecteurs $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes dans le référentiel choisi, leur dérivée par rapport au temps est donc nulle. Il reste :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \ddot{x}.\vec{e_x} + \ddot{y}.\vec{e_y} + \ddot{z}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \qquad (1.6)}$$

NOTA : La dérivée première par rapport au temps $\left(\frac{d}{dt}\right)$ *d'une grandeur* X *se note aussi* $\dot{X}$. *La dérivée seconde par rapport au temps* $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)$ *d'une grandeur* X *se note aussi* $\ddot{X}$

NOTA : La vitesse $\vec{v}$ *est aussi obtenue directement en dérivant le vecteur position :* $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{OM})$.

1.3 Cinematique dans le repère cylindrique



1.3.1 Expression du vecteur position

En coordonnées cylindriques, le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z} \qquad (1.7)}$$

Si on "attache" au référentiel un repère cartésien (en plus du repère cylindrique) avec la même origine, il est possible de d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ du repère cartésien (ou inversement) :

$$\begin{array}{rcl} \vec{e_\rho} = \cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y} & \Longleftrightarrow & \vec{e_x} = \cos\theta.\vec{e_\rho} - \sin\theta.\vec{e_\theta} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta.\vec{e_x} + \cos\theta.\vec{e_y} & & \vec{e_y} = \sin\theta.\vec{e_\rho} + \cos\theta.\vec{e_\theta} \end{array}$$

1.3.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Nous procédons de la même manière que précédemment en différentiant le vecteur position :

$$d\vec{OM} = d\vec{\ell} = (d\rho.\vec{e_\rho} + \rho.d\vec{e_\rho}) + (dz.\vec{e_z} + z.d\vec{e_z})$$

On sait que $d\vec{e_z} = 0$ mais par contre $d\vec{e_\rho} \neq 0$ car le vecteur $\vec{e_\rho}$ est susceptible de varier pour le repère cylindrique. Pour connaître l'expression de $d\vec{e_\rho}$, revenons dans le repère cartésien un petit moment... Nous avons :

$$\begin{aligned} d\vec{e_\rho} &= d(\cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y}) \\ &= [d(\cos\theta).\vec{e_x} + \cos\theta.d\vec{e_x}] + [d(\sin\theta).\vec{e_y} + \sin\theta.d\vec{e_y}] \\ &= d(\cos\theta).\vec{e_x} + d(\sin\theta).\vec{e_y} \\ &= -d\theta.\sin\theta.\vec{e_x} + d\theta.\cos\theta.\vec{e_y} \\ &= d\theta.(-\sin\theta.\vec{e_x} + \cos\theta.\vec{e_y}) \\ &= d\theta.\vec{e_\theta} \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur "déplacement élémentaire", en coordonnées cylindriques, s'écrit :

$$\boxed{d\vec{\ell} = d\rho.\vec{e_\rho} + \rho.d\theta.\vec{e_\theta} + dz.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho.d\theta \\ dz \end{pmatrix} \qquad (1.8)}$$

1.3.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur "déplacement élémentaire" : $\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{\rho}.\vec{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + \dot{z}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad (1.9)}$$

1.3.4 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right)\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right] \\ &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right] \\ &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\right] \end{aligned}$$

En passant de la deuxième ligne à la troisième, nous avons utilisé la relation $d\vec{e_\rho} = d\theta.\vec{e_\theta}$ démontrée précédemment. Il ne nous reste plus qu'à exprimer le vecteur $d\vec{e_\theta}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$. Nous procédons de la même manière que précédemment, en utilisant l'expression de $\vec{e_\theta}$ dans le repère cartésien et en effectuant une différentiation $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} d\vec{e_\theta} &= d(-\sin\theta.\vec{e_x} + \cos\theta.\vec{e_y}) \\ &= [-d(\sin\theta).\vec{e_x} - \sin\theta.d\vec{e_x}] + [d(\cos\theta).\vec{e_y} + \cos\theta.d\vec{e_y}] \\ &= -d(\sin\theta).\vec{e_x} + d(\cos\theta).\vec{e_y} \\ &= -d\theta.\cos\theta.\vec{e_x} - d\theta.\sin\theta.\vec{e_y} \\ &= -d\theta.(\cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y}) \\ &= -d\theta.\vec{e_\rho} \end{aligned}$$

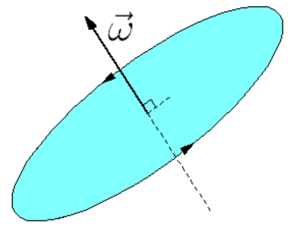
En utilisant cette dernière identité et en regroupant les composantes des vecteurs de base, il vient :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{e_\theta} - \rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\vec{e_\rho}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\right] \\
&= \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).\vec{e_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}
\end{aligned}$$

Cette dernière équation constitue l'expression générale de l'accélération dans le repère cylindrique. En notation simplifiée, elle s'écrit aussi :

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right).\vec{e_\theta} + \ddot{z}.\vec{e_z} \qquad \text{ou} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \qquad (1.10)}$$

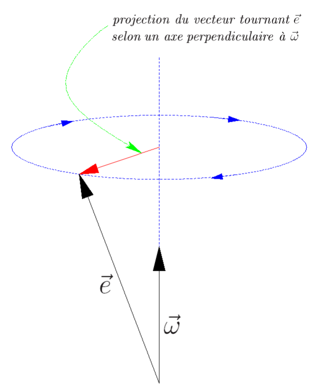
Remarque 1 : La dérivée par rapport au temps de l'angle θ se note aussi ω. Cette grandeur représente la vitesse angulaire du point M, son unité est le $rad.s^{-1}$ ($[T]^{-1}$). Par extension, on introduit aussi le "vecteur" $\vec{\omega}$ pour indiquer le plan dans lequel s'effectue la rotation, ainsi que son sens. Par définition, le vecteur $\vec{\omega}$ est toujours perpendiculaire au plan de la rotation, sa norme est proportionnelle à la vitesse angulaire, et sa direction indique le sens de rotation selon la règle du bonhomme d'Ampère



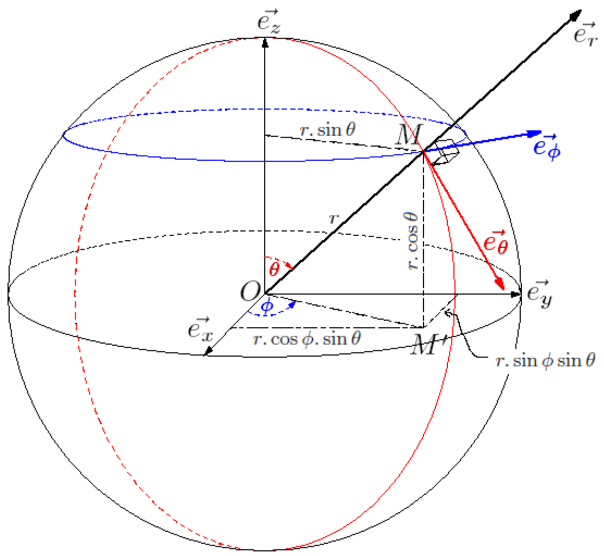
Remarque 2 : Nous avons vu que la dérivée par rapport au temps des vecteurs unitaires $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ conduisent aux égalités suivantes : $\frac{d}{dt}\vec{e_\rho} = \omega.\vec{e_\theta}$ et $\frac{d}{dt}\vec{e_\theta} = -\omega.\vec{e_\rho}$. Il vient alors naturellement : $\frac{d^2}{dt^2}\vec{e_\rho} = -\omega^2.\vec{e_\rho}$. Nous remarquons aussi qu'il est possible d'exprimer très simplement la dérivée par rapport au temps des vecteurs "tournants" $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ en utilisant le produit vectoriel :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{e_\rho} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_\rho} \qquad et \qquad \frac{d}{dt}\vec{e_\theta} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_\theta} \qquad (1.11)}$$

Remarque 3 : Même dans le cas où le vecteur $\vec{\omega}$ n'est pas perpendicualire aux vecteurs tournants $\vec{e_\theta}$ ou $\vec{e_\rho}$, les relations établies ci-dessous restent valables : en effet, le produit vectoriel fait intervenir le sinus de l'angle entre les vecteurs concernés ! Ainsi, on ne considère que la projection du vecteur tournant selon un axe perpendiculaire à $\vec{\omega}$, puisque uniquement cette composante varie au cours du temps (et est donc susceptible de donner une dérivée non-nulle).



1.4 Cinématique dans le repère sphérique



1.4.1 Expression du vecteur position

En coordonnées sphériques, le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\vec{OM} = r.\vec{e_r} \qquad (1.12)}$$

En plus du repère sphérique, nous "attachons" au référentiel utilisé un repère cartésien avec la même origine. Il est possible de d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ du repère cartésien :

$$\begin{aligned}
\vec{e_r} &= \sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} + \cos\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\theta} &= \cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \sin\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\phi} &= -\sin\phi.\vec{e_x} + \cos\phi.\vec{e_y}
\end{aligned}$$

1.4.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Pour établir l'expression mathématique du vecteur $\vec{d\ell}$, nous pouvons procéder exactement de la même manière que précédemment, c'est à dire en exprimant le vecteur $\vec{OM}$ à l'aide de ses coordonnées cartésiennes et en le différentiant, puis en essayant de faire ressortir à nouveau des vecteurs unitaires du repère sphérique. Le calcul ne présente aucune difficulté technique... il est d'ailleurs effectué dans le paragraphe suivant ! Cependant (et pour changer), nous allons établir l'expression de $\vec{d\ell}$ à partir de considérations géométriques. Nous recherchons $\vec{d\ell}$ sous la forme $\vec{d\ell} = dA.\vec{e_r} + dB.\vec{e_\theta} + dC.\vec{e_\phi}$ ou dA, dB et dC sont des éléments différentiels (scalaires) respectivement égaux à $d\ell$ lorsque...

- $dA = d\ell$ lorsque θ et ϕ sont fixes, seule la coordonnée r peut changer. On a donc : $dA = dr$
- $dB = d\ell$ lorsque r et ϕ sont fixes, seule la coordonnée θ peut changer. On a donc : $dB = r.d\theta$
- $dC = d\ell$ lorsque r et θ sont fixes, seule la coordonnée ϕ peut changer. On a donc : $dC = r.\sin\theta.d\phi$

Il vient :

$$\boxed{\vec{d\ell} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.d\phi.\vec{e_\phi} \qquad (1.13)}$$

Remarque : La technique utilisée ici est aussi valable pour retrouver rapidement l'expression de $\vec{d\ell}$ dans le repère cylindrique (ou cartésien) ! Ainsi, il est inutile d'apprendre "par coeur" l'expression du vecteur $\vec{d\ell}$ puisqu'il est possible de le retrouver très facilement.

1.4.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur "déplacement élémentaire" : $\vec{v} = \frac{\vec{d\ell}}{dt}$.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}.\vec{e_r} + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\frac{d\phi}{dt}.\vec{e_\phi} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r.\sin\theta.\dot{\phi} \end{pmatrix} \qquad (1.14)}$$

1.4.4 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Il vient (en utilisant les notations simplifiées) :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}.\vec{e_r}\right) + \frac{d}{dt}\left(r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta}\right) + \frac{d}{dt}\left(r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi}\right) \\
&= \left(\ddot{r}.\vec{e_r} + \dot{r}.\dot{\vec{e_r}}\right) + \left(\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\frac{d}{dt}\left[\dot{\theta}.\vec{e_\theta}\right]\right) + \left(\frac{d}{dt}\left[r.\sin\theta\right].\dot{\phi}.\vec{e_\phi} + r.\sin\theta.\frac{d}{dt}\left[\dot{\phi}.\vec{e_\phi}\right]\right) \\
&= \left(\ddot{r}.\vec{e_r} + \dot{r}.\dot{\vec{e_r}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\left[\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\dot{\vec{e_\theta}}\right]\right) + \left(\left[\dot{r}.\sin\theta + r.\dot{\theta}.\cos\theta\right]\dot{\phi}.\vec{e_\phi} + r.\sin\theta\left[\ddot{\phi}.\vec{e_\phi} + \dot{\phi}.\dot{\vec{e_\phi}}\right]\right) \\
&= \left(\ddot{r}.\vec{e_r} + \dot{r}.\dot{\vec{e_r}}\right) + \left(\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\ddot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\dot{\theta}.\dot{\vec{e_\theta}}\right) + \left(\dot{r}.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi} + r.\dot{\theta}.\cos\theta.\dot{\phi}\vec{e_\phi} + r.\sin\theta.\ddot{\phi}\vec{e_\phi} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\dot{\vec{e_\phi}}\right)
\end{aligned}$$

Pour poursuivre le calcul, nous sommes (cette fois-ci) contraints de calculer explicitement $\dot{\vec{e_r}}$; $\dot{\vec{e_\theta}}$ et $\dot{\vec{e_\phi}}$

Rappel : $\vec{e_r} = \sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} + \cos\theta.\vec{e_z}$, $\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \sin\theta.\vec{e_z}$ et $\vec{e_\phi} = -\sin\phi.\vec{e_x} + \cos\phi.\vec{e_y}$ soit...

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e_r}} &= \frac{d}{dt}(\sin\theta\cos\phi).\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\sin\theta\sin\phi).\vec{e_y} + \frac{d}{dt}(\cos\theta).\vec{e_z} \\
\dot{\vec{e_r}} &= \left(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\right).\vec{e_x} + \left(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\right).\vec{e_y} - \dot\theta\sin\theta.\vec{e_z} \\
&= \dot\theta\cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \dot\theta\cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \dot\phi\sin\theta\sin\phi.\vec{e_x} + \dot\phi\sin\theta\cos\phi.\vec{e_y} - \dot\theta\sin\theta.\vec{e_z} \\
&= \dot\theta\vec{e_\theta} + \dot\phi\sin\theta.\vec{e_\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e_\theta}} &= \frac{d}{dt}(\cos\theta\cos\phi).\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\cos\theta\sin\phi).\vec{e_y} + \frac{d}{dt}(-\sin\theta).\vec{e_z} \\
\dot{\vec{e_\theta}} &= \left(-\dot\theta\sin\theta\cos\phi - \dot\phi\cos\theta\sin\phi\right).\vec{e_x} + \left(-\dot\theta\sin\theta\sin\phi + \dot\phi\cos\theta\cos\phi\right).\vec{e_y} - \dot\theta\cos\theta.\vec{e_z} \\
&= -\dot\theta\sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} - \dot\theta\sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \dot\phi\cos\theta\sin\phi.\vec{e_x} + \dot\phi\cos\theta\cos\phi.\vec{e_y} - \dot\theta\cos\theta.\vec{e_z} \\
&= -\dot\theta\vec{e_r} + \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e_\phi}} &= \frac{d}{dt}(-\sin\phi).\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\cos\phi).\vec{e_y} \\
\dot{\vec{e_\phi}} &= -\dot\phi\cos\phi.\vec{e_x} - \dot\phi\sin\phi.\vec{e_y}
\end{aligned}$$

On remarque que $\dot{\vec{e_\phi}}$ ne s'exprime qu'à partir des vecteurs $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$. On sait aussi que la dérivée du vecteur $\vec{e_\phi}$ doit s'exprimer uniquement en fonction des vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$. Nous allons donc exprimer le vecteur $\dot{\vec{e_\phi}}$ par une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ en essayant de supprimer la composante selon $\vec{e_y}$. Pour ce faire, nous proposons la combinaison linéaire suivante :

$$= -\dot\phi\sin\theta\vec{e_r} - \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\theta}$$ *(remplacez $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ par leurs expressions dans le repère cartésien et vérifiez la validité de cette relation)*

En remplaçant les expressions de $\dot{\vec{e_r}}$; $\dot{\vec{e_\theta}}$ et $\dot{\vec{e_\phi}}$ dans celle de $\vec{a}$, puis en regroupant les termes et en les simplifiant, il vient finalement :

$$\vec{a} = \left(\ddot r.\vec{e_r} + \dot r.\left(\dot\theta\vec{e_\theta} + \dot\phi\sin\theta.\vec{e_\phi}\right)\right) + \left(\dot r\dot\theta\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\vec{e_\theta} + r\dot\theta\left(-\dot\theta\vec{e_r} + \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\phi}\right)\right) + \left(\dot r.\sin\theta.\dot\phi.\vec{e_\phi} + r.\dot\theta\cos\theta.\dot\phi\vec{e_\phi} + r\sin\theta.\ddot\phi\vec{e_\phi} + r\sin\theta.\dot\phi\left(-\dot\phi\sin\theta\vec{e_r} - \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\theta}\right)\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta\right).\vec{e_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e_\theta} + \left(2r\dot\phi\dot\theta\cos\theta + 2\dot r\dot\phi\sin\theta + r\ddot\phi\sin\theta\right).\vec{e_\phi}} \quad (1.15)$$

Méthode : Par construction, les expressions des vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ s'expriment à l'aide du cosinus et du sinus des angles θ et ϕ. Il ne sert à rien d'apprendre ces expressions "par coeur" puisque, une fois que l'on a compris comment elles sont construites, on peut toujours les redémontrer. Toutefois une erreur est si vite arrivée... Vous pouvez (devez) **tester** vos projections vectorielles dans des cas simples. Par exemple, un étudiant a trouvé les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{e_r} &= \sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} + \cos\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\theta} &= \cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \sin\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\phi} &= -\sin\phi.\vec{e_x} + \cos\phi.\vec{e_y}
\end{aligned}}$$

On sait que si $\theta = 0$ et $\phi = 0$, alors $\vec{e_r} = \vec{e_z}$, $\vec{e_\theta} = \vec{e_x}$ et $\vec{e_\phi} = \vec{e_y}$
Il ne reste plus qu'à tester les expressions trouvées :
$\vec{e_r} = \sin 0\cos 0.\vec{e_x} + \sin 0\sin 0.\vec{e_y} + \cos 0.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_z}$
$\vec{e_\theta} = \cos 0\cos 0.\vec{e_x} + \cos 0\sin 0.\vec{e_y} - \sin 0.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_x}$
$\vec{e_\phi} = -\sin 0.\vec{e_x} + \cos 0.\vec{e_y} \stackrel{?}{=} \vec{e_y}$

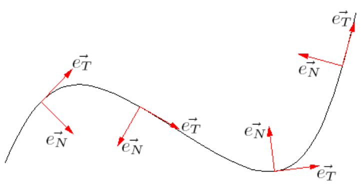
On sait que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = 0$, alors $\vec{e_r} = \vec{e_x}$, $\vec{e_\theta} = -\vec{e_z}$ et $\vec{e_\phi} = \vec{e_y}$
On vérifie :
$\vec{e_r} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos 0.\vec{e_x} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin 0.\vec{e_y} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_x}$
$\vec{e_\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos 0.\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin 0.\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} -\vec{e_z}$
$\vec{e_\phi} = -\sin 0.\vec{e_x} + \cos 0.\vec{e_y} \stackrel{?}{=} \vec{e_y}$

On sait que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$, alors $\vec{e_r} = \vec{e_y}$, $\vec{e_\theta} = -\vec{e_z}$ et $\vec{e_\phi} = -\vec{e_x}$
On vérifie :
$\vec{e_r} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_x} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_y} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_y}$
$\vec{e_\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} -\vec{e_z}$
$\vec{e_\phi} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_y} \stackrel{?}{=} -\vec{e_x}$

On sait que si $\theta = \pi$ et $\phi = \pi$, alors $\vec{e_r} = -\vec{e_z}$, $\vec{e_\theta} = \vec{e_x}$ et $\vec{e_\phi} = -\vec{e_y}$
On vérifie :
$\vec{e_r} = \sin\pi\cos\pi.\vec{e_x} + \sin\pi\sin\pi.\vec{e_y} + \cos\pi.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} -\vec{e_z}$
$\vec{e_\theta} = \cos\pi\cos\pi.\vec{e_x} + \cos\pi\sin\pi.\vec{e_y} - \sin\pi.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_x}$
$\vec{e_\phi} = -\sin\pi.\vec{e_x} + \cos\pi.\vec{e_y} \stackrel{?}{=} -\vec{e_y}$

Etc... Toutes les expressions sont correctes, les équations semblent *a priori* bien être les bonnes !

1.5 Repère de Frenet



On désigne par $x_{(t)}$, $y_{(t)}$ et $z_{(t)}$ les coordonnées cartésiennes d'un point M. Sa trajectoire définie une courbe qui est orientée dans le sens du mouvement (suivant les valeurs croissantes du temps). La direction de la tangente à une courbe en un point M est la direction d'une corde MM' lorsque M tend vers M'. On définit le vecteur unitaire $\vec{e_T}$ comme étant le vecteur unitaire tangent à la courbe et orienté dans le sens du mouvement. On introduit le vecteur $\vec{e_N}$, orthogonal à $\vec{e_T}$ et dirigé selon la concavité de la trajectoire. Le plan formé par les vecteurs $\vec{e_T}$ et $\vec{e_N}$ est aussi appelé le plan "osculateur" au point M considéré. On complète ces deux vecteurs unitaires par le vecteur $\vec{e_B} = \vec{e_T} \wedge \vec{e_N}$. Le vecteur ainsi définit porte le nom de binormale. La base $(\vec{e_T},\ \vec{e_N},\ \vec{e_B})$ constitue le trièdre de Frenet.

1.5.1 Expression du vecteur position

Dans le repère de Frenet, il est impossible d'écrire de manière explicite le vecteur position $\vec{OM}$. Nous définissons cependant une abscisse curviligne s (un scalaire) de M de long de la trajectoire comme étant égal à la longueur de l'arc $\widehat{OM}$.

1.5.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Le vecteur "déplacement élémentaire" s'écrit simplement :

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{d\ell} = ds.\vec{e_T} \qquad (1.16)}$$

Remarque 1 : $\vec{d\ell} = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.\vec{e_T}$ *en exprimant ds à l'aide des coordonnées cartésiennes,* $\vec{d\ell} = \sqrt{dr^2+(r.d\theta)^2+dz^2}.\vec{e_T}$ *en exprimant ds à l'aide des coordonnées cylindriques et* $\vec{d\ell} = \sqrt{dr^2+(r.d\theta)^2+(r\sin\theta.d\phi)^2}.\vec{e_T}$ *en exprimant ds selon les coordonnées sphériques*

Remarque 2 : Cette équation permet aussi de donner une nouvelle définition du vecteur $\vec{e_T}$: $\vec{e_T} = \frac{d(\vec{OM})}{ds}$

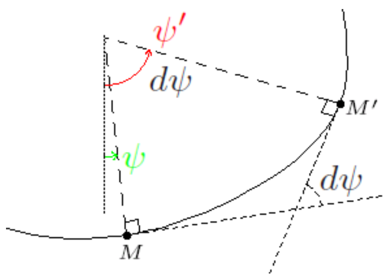
1.5.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit du vecteur "déplacement élémentaire" :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}.\vec{e_T} \qquad (1.17)}$$

Le vecteur vitesse est toujours dirigé selon le vecteur $\vec{e_T}$, Naturellement, il vient : $\vec{v} = \|\vec{v}\|.\vec{e_T}$

1.5.4 Expression du rayon de courbure



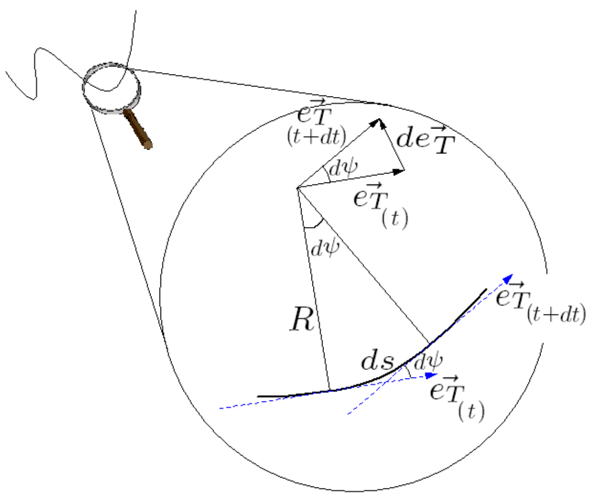
La courbure d'une courbe C (scalaire) au point M est définie de la manière suivante :

$$C = \lim_{M'\to M} \frac{\psi'-\psi}{MM'} = \frac{d\psi}{ds}$$

Le rayon de courbure est défini comme l'inverse de la courbure : $R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\psi}$. Dans le repère de Frenet, il vient :

$$d(\vec{e_T}) = \lim_{M'\to M} \left(\vec{e_T}_{(M')} - \vec{e_T}_{(M)}\right) = d\psi.\vec{e_N} = \frac{ds}{R}\vec{e_N} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{d\vec{e_T}}{ds} = \frac{\vec{e_N}}{R}}$$

1.5.5 Expression du vecteur accélération



Le vecteur accélération se déduit du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e_T} + \frac{ds}{dt}.\frac{d}{dt}(\vec{e_T})$. Or nous avons vu précédemment que $d(\vec{e_T}) = \frac{ds}{R}\vec{e_N}$, soit $\frac{d}{dt}(\vec{e_T}) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\vec{e_N}$. Il vient naturellement :

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e_T} + \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.\vec{e_N} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}.\vec{e_T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}.\vec{e_N}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}.\vec{e_T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}.\vec{e_N} \qquad (1.18)}$$

1.6 Pourquoi avons-nous besoin de ces repères ?

A l'évidence, le repère cartésien est certainement le plus intuitif d'entre tous. C'est peut-être aussi le plus "facile" à utiliser puisque ses vecteurs de base sont "fixes" dans le référentiel choisi.. ? Cette dernière affirmation n'est peut-être pas tout à fait correcte : Pour s'en convaincre, reprenons le principe de Curie :

- Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les éléments de symétrie des effets produits

- Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

Les éléments de symétrie d'un objet physique sont les transformations géométriques qui laissent cet objet invariant, c'est à dire qui peuvent l'amener en coïncidence avec lui-même. Nous verrons, au cours des prochains chapitres, que l'application de forces précède le mouvement. Les forces peuvent donc être considérées comme des "causes" et le mouvement d'un corps comme un "effet". Si les forces possèdent des éléments de symétrie cylindrique (par exemple), alors le mouvement du corps sur lequel s'appliquent ces forces possèdera aussi des éléments de symétrie cylindrique... et nous avons tout intérêt à utiliser le repère cylindrique ! Choisir un autre repère (cartésien, sphérique...) est possible, mais dans ce dernier les éléments de symétrie du mouvement seront très difficiles à intuiter, et les équation de la trajectoire deviendront très vite intraitables (bien que toujours justes !).

Les formules établies de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel dans les repères cartésiens, cylindriques, sphériques et de Frenet sont générales : c'est à dire qu'elles sont susceptibles de décrire parfaitement toutes les trajectoires possibles, vitesses ou accélérations. Dans la pratique, de nombreux termes disparaissent naturellement en étudiant (entre autre) les symétries des causes du mouvement (les forces). En outre, l'étude de la dimension du mouvement peut aussi simplifier considérablement les calculs... par exemple, si le mouvement d'un corps a lieu dans un plan horizontal $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ il est possible de supprimer les composantes selon $\vec{e_z}$ dans le repère cartésien et/ou cylindrique...

ATTENTION : Si vous êtes susceptibles d'utiliser un repère autre que ceux énoncés dans ce chapitre, assurez-vous qu'il reste toutefois orthonormé !

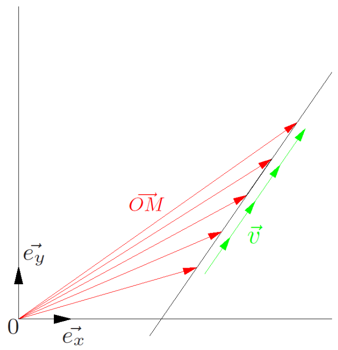
1.7 Exemples de mouvements simples

1.7.1 Le mouvement rectiligne

Il s'agit certainement du mouvement le plus simple d'entre tous. Pour traiter ce type de mouvement, nous choisissons le repère cartésien (en ne s'intéressant qu'à la composante selon $\vec{e_x}$). Nous aurions aussi pu choisir le repère cylindrique (composante selon $\vec{e_\rho}$ uniquement) ou le repère sphérique (composante selon $\vec{e_r}$ uniquement).

Le mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par les conditions suivantes :



- $\vec{a} = \vec{0}$

- $\vec{v} = \vec{C^{te}} = \vec{v_0}$ (ni la direction, ni le sens, ni la norme du vecteur vitesse ne varie dans le temps)

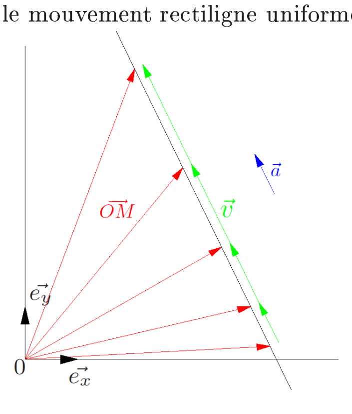
- Le vecteur position $\vec{OM}$ peut varier dans le temps, à la fois en direction et en sens. Sa norme varie linéairement avec le temps.

- $C = 0$ (courbure) soit $R = \infty$ (rayon de courbure)

- Notons aussi que $||\vec{v}|| = 0 = C^{te}$ est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme : l'objet est immobile.

le mouvement rectiligne uniformément accéléré (retardé)

le mouvement rectiligne uniformément accéléré (retardé) est caractérisé par les conditions suivantes :



- $\vec{a} = \vec{C^{te}} = \vec{a_0}$

- Le sens et la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$ ne varie pas dans le temps. Sa norme varie linéairement avec le temps.

- Le vecteur vitesse $\vec{OM}$ peut varier dans le temps, à la fois en direction et en sens. Sa norme est une fonction quadratique du temps.

- les vecteurs vitesse et accélération sont dans le même sens ($\vec{a}.\vec{v} > 0$) dans le cas accéléré, tandis qu'ils sont en sens opposé ($\vec{a}.\vec{v} < 0$) dans le cas retardé.

- $C = 0$ (courbure) soit $R = \infty$ (rayon de courbure)

Le mouvement rectiligne non-uniformément accéléré

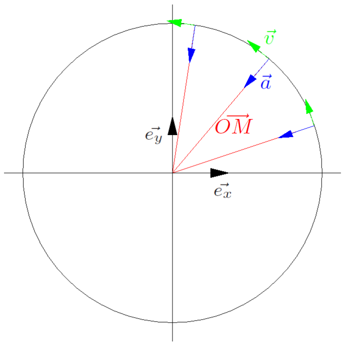
Le mouvement rectiligne non-uniformément accéléré est caractérisé par les conditions suivantes :
- Le sens et la norme du vecteur $\vec{a}$ peuvent varier dans le temps, mais sa direction ne varie pas !
- Le sens et la norme du vecteur $\vec{v}$ peuvent varier dans le temps, mais sa direction ne varie pas !
- Le vecteur vitesse $\vec{OM}$ peut varier dans le temps, à la fois en direction et en sens. Sa norme est une fonction "quelconque" du temps.
- $C = 0$ (courbure) soit $R = \infty$ (rayon de courbure)

1.7.2 Le mouvement circulaire

Le mouvement "circulaire" est caractérisé par un rayon de courbure constant $R = C^{te}$. Il s'agit d'un mouvement plan. Nous choisissons de l'étudier dans le repère cylindrique dépourvu de la composante selon $\vec{e_z}$ - il s'agit du repère polaire $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$. Nous aurions aussi pu étudier le mouvement circulaire dans le repère sphérique en supprimant la composante selon $\vec{e_\theta}$ et en posant $\theta = C^{te} \neq 0$.

Le mouvement circulaire uniforme

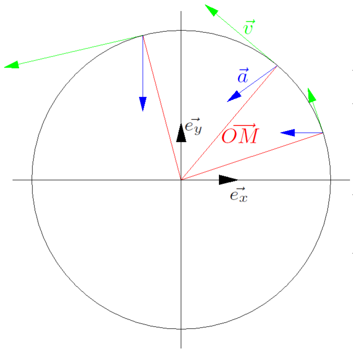
Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par les conditions suivantes :



- $\rho = C^{te} = \rho_0$ (rayon de courbure). La norme du vecteur position est constante. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.
- Le vecteur "vitesse angulaire" $\vec{\omega}$ est constant (le mouvement est plan). Sa norme est constante avec $\frac{d\theta}{dt} = C^{te} = \omega$. De ce fait, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$.
- l'expression générale du vecteur vitesse dans le repère cylindrique se simplifie et devient : $\vec{v} = \rho_0 \omega . \vec{e_\theta}$ avec $||\vec{v}|| = \rho_0 . \omega = C^{te}$
- l'expression générale du vecteur accélération dans le repère cylindrique se simplifie et devient : $\vec{a} = -\rho_0 \omega^2 . \vec{e_\rho}$ avec $||\vec{a}|| = \rho_0 . \omega^2 = C^{te}$
- Dans ce cas du mouvement circulaire uniforme uniquement, le repère cylindrique et le repère de Frenet correspondent (presque !) : $\vec{e_\rho} = -\vec{e_N}$ et $\vec{e_\theta} = \vec{e_T}$

Le mouvement circulaire uniformément accéléré

Le mouvement circulaire uniformément accéléré est caractérisé par les conditions suivantes :



- $\rho = C^{te} = \rho_0$ (rayon de courbure). La norme du vecteur position est constante. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.
- Le vecteur "accélération angulaire" $\vec{\dot{\omega}}$ est constant (en norme, direction et sens). La direction et le sens du vecteur "vitesse angulaire" $\vec{\omega}$ sont constantes, mais sa norme varie linéairement avec le temps. On a $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega} = C^{te}$.
- l'expression générale du vecteur vitesse dans le repère cylindrique se simplifie et devient : $\vec{v} = \rho_0 . \omega_{(t)} . \vec{e_\theta}$.
- l'expression générale du vecteur accélération dans le repère cylindrique se simplifie et devient : $\vec{a} = -\rho_0 \omega^2_{(t)} . \vec{e_\rho} + \rho_0 \dot{\omega} . \vec{e_\theta}$.

Le mouvement circulaire non-uniformément accéléré

Le mouvement circulaire non-uniformément accéléré est caractérisé par les conditions suivantes :
- $\rho = C^{te} = \rho_0$ (rayon de courbure). La norme du vecteur position est constante. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.
- Il n'y a pas de conditions particulières sur $\frac{d^2\theta}{dt^2}$
- Les expressions générales des vecteurs vitesse et accélération se simplifient uniquement avec $\dot{\rho} = 0$.

1.7.3 Autres types de mouvement...

Chaque mouvement peut être décomposé comme une somme de trajectoires rectilignes et circulaires. Certains mouvement obeïssent à des équations mathématiques connues reliant entre elles les différentes coordonnées du repère. Citons, à titre d'exemple...
- Le mouvement hélicoïdal, à étudier de préférence dans le repère cylindrique, où $\rho = C^{te}$ mais $z = z_{(t)}$. Il s'agit d'un mouvement de rotation dans le plan $\{\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}\}$ et de translation selon l'axe [Oz).

- Le mouvement de spirale, à étudier de préférence dans le repère cylindrique, où $z = 0$ et $\rho = \rho_{(t)}$. Il s'agit d'une rotation dans le plan $\{\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}\}$ accompagné d'une variation de la coordonée ρ.

- Le mouvement cycloïdal, à étudier de préférence dans le repère cartésien (ex : la trajectoire de la valve d'une roue de vélo en circulation). Il s'agit d'une rotation uniforme dans un plan accompagné d'un mouvement rectiligne uniforme dans ce même plan.

- Les mouvements vibratoires, à étudier dans l'un ou l'autre des repères selon les symétries de la vibration

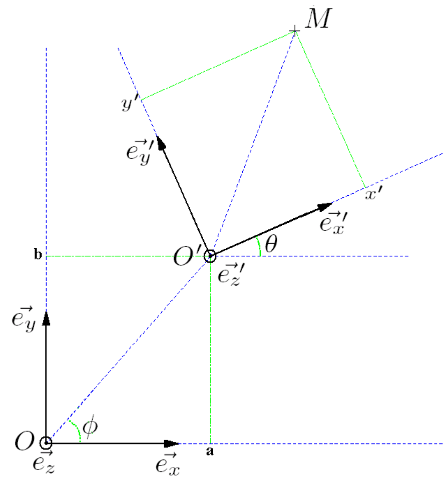
- Le mouvement elliptique, le mouvement hyperbolique, le mouvement parabolique etc...

Chapitre 2

Mouvement relatif, changement de référentiel

2.1 Position du problème

2.1.1 Definitions et notations



Il est nécessaire de choisir un référentiel pour définir à chaque instant la position, la vitesse et l'accélération d'un objet. Souvent, le référentiel choisi est celui dans lequel le physicien observe le mouvement. Mais quelques fois, ce référentiel est peu adapté à une description cinématique simple et il est plus avantageux d'utiliser un référentiel relatif. Soit $\Re$ un référentiel "fixe" ou "absolu" lié à l'observateur, et $\Re'$ un référentiel "mobile" ou "relatif". Nous allons chercher comment se transforment les vecteurs position, vitesse et accélération lorsque l'on passe d'un référentiel à l'autre.

Remarque : Les termes "fixe" et "mobile" n'ont pas de signification intrinsèque. Ce qui est important, c'est que les deux référentiels soient en mouvement l'un par rapport à l'autre. Il est préférable, cependant, que le référentiel "fixe" soit un référentiel galiléen.

Référentiel absolu $\Re$
- Système d'axe $[Ox), [Oy), [Oz)$
- Repère $\{\vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}\}$
- Vecteur $\vec{OO'} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$

Référentiel relatif $\Re'$
- Système d'axe $[Ox'), [Oy'), [Oz')$
- Repère $\{\vec{e_x'},\ \vec{e_y'},\ \vec{e_z'}\}$
- Vecteur $\vec{O'M} = x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}$

On note :

- $\vec{v}_{(M/\Re)}$ la vitesse du point M dans le référentiel absolu $\Re$
- $\vec{v}_{(M/\Re')}$ la vitesse du point M dans le référentiel relatif $\Re'$
- $\vec{v}_{(\Re'/\Re)}$ la vitesse d'entrainement de $\Re'$ dans $\Re$, c'est à dire la vitesse qu'aurait le point M dans $\Re$ s'il était fixe par rapport à $\Re'$

- $\vec{a}_{(M/\Re)}$ l'accélération du point M dans le référentiel absolu $\Re$
- $\vec{a}_{(M/\Re')}$ l'accélération du point M dans le référentiel relatif $\Re'$
- $\vec{a}_{(\Re'/\Re)}$ l'accélération d'entrainement de $\Re'$ dans $\Re$, c'est à dire l'accélération qu'aurait le point M dans $\Re$ s'il était fixe par rapport à $\Re'$

Attention : $\vec{v}_{(\Re'/\Re)} \neq \vec{v}_{(O'/\Re)}$ et $\vec{a}_{(\Re'/\Re)} \neq \vec{a}_{(O'/\Re)}$. La vitesse (accélération) d'entrainement n'est pas la vitesse (accélération) du point O' par rapport au référentiel absolu car, si tel était le cas, nous aurions omit la possibilité d'une rotation du référentiel $\Re'$ par rapport à $\Re$

*Remarque 1 : Les vecteurs position, vitesse et accélération, qu'ils soient considérés dans le référentiel absolu ou relatif, sont avant tout des vecteurs au sens mathématique du terme. De ce fait, ils peuvent être exprimés à la fois dans les **repères** $\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$ ou $\{\vec{e_x'},\vec{e_y'},\vec{e_z'}\}$. Il s'agit, là encore, de ne pas confondre les notions de **repère** et de **référentiel**. Toutefois, pour rendre la notion de "changement de référentiel" plus intuitive, nous adopterons les règles suivantes :*

- *La position, la vitesse et l'accélération d'un point M dans le référentiel absolu seront exprimées dans la base des vecteurs du repère lié au référentiel absolu $\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$*

- *La position, la vitesse et l'accélération du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu seront exprimées dans la base des vecteurs du repère lié au référentiel absolu $\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$*

- *La position, la vitesse et l'accélération d'un point M dans le référentiel relatif seront exprimées dans la base des vecteurs du repère lié au référentiel relatif $\{\vec{e_x'},\vec{e_y'},\vec{e_z'}\}$*

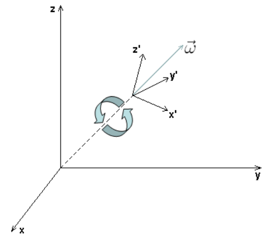
2.1.2 Mouvement d'entrainement : translation et/ou rotation de $\Re'$ par rapport à $\Re$

Lorsque θ est fixe ($\dot{\theta} = 0$), le référentiel relatif $\Re'$ est en *translation* par rapport au référentiel absolu $\Re$: quelques soient les variations du vecteur $\vec{OO'}$, les vecteurs de base $\{\vec{e_x}, \vec{e_x'}\}$, $\{\vec{e_y}, \vec{e_y'}\}$ et $\{\vec{e_z}, \vec{e_z'}\}$ forment toujours le même angle entre eux.

Lorsque le vecteur $\vec{OO'}$ est fixe ($\frac{d}{dt}\vec{OO'} = 0$), et que θ est variable dans le temps ($\dot{\theta} \neq 0$), le référentiel relatif $\Re'$ est en *rotation* par rapport au référentiel absolu $\Re$.

Dans le cas général, lorsque le vecteur $\vec{OO'}$ et l'angle θ sont variables dans le temps, le référentiel relatif $\Re'$ est en *translation et en rotation* par rapport au référentiel absolu $\Re$. C'est le cas pour lequel nous allons établir les relations de passage du référentiel relatif au référentiel absolu et inversement.

Remarque : pour des raisons de clarté, il apparait dans le schéma ci-dessus que le vecteur $\vec{e_z}$ est toujours colinéaire au vecteur $\vec{e_z'}$: même si une telle configuration est souvent rencontrée en pratique, elle ne constitue pas le cas général. Dans la suite, nous imaginons un référentiel en translation et en rotation par rapport à un autre, pour lequel le vecteur rotation $\vec{\omega}_{\Re'/\Re}$ est quelconque (c.f. figure ci-contre)



2.2 Composition du vecteur position

En utilisant la relation de Chasles, il vient naturellement : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$. Il s'agit de la loi de composition du vecteur position.

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \quad (2.1)$$
$$\vec{OM} = (a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}) + \left(x'.\vec{e_x'} + y'.\vec{e_y'} + z'.\vec{e_z'}\right) \quad (2.2)$$

Il est possible d'exprimer les vecteurs de base du repère relatif en fonction des vecteurs de base du repère absolu pour que ne subsistent que des termes (composantes) selon $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$.

2.3 Composition du vecteur vitesse

Connaissant l'expression de changement de référentiel pour le vecteur position, il ne reste plus qu'à dériver cette dernière pour obtenir la loi de composition du vecteur vitesse. On note $\frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{V}\right)$ la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport au temps et par rapport au référentiel $\Re$. Dans la suite, $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}$ est le vecteur rotation du référentiel relatif $\Re'$ par rapport au référentiel absolu $\Re$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{(M/\Re)} = \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OM}\right) &= \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{O'M'}\right) && (2.3)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + x'\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'} + y'\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{e_z'} + z'\frac{d\vec{e_z'}}{dt}\right) && (2.4)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + x'\frac{d\vec{e_x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e_y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e_z'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'}\frac{dz'}{dt}\vec{e_z'} && (2.5)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + x'\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_x'}\right) + y'\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_y'}\right) + z'\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e_z'}\right) + \frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'}\frac{dz'}{dt}\vec{e_z'} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(x'\vec{e_x'} + y'\vec{e_y'} + z'\vec{e_z'}\right)}_{\vec{O'M}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{e_x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e_y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e_z'}}_{\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}(\vec{O'M})} && (2.6)\\
&= \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M}}_{\vec{v}_{(\Re'/\Re)}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)}_{\vec{v}_{(M/\Re')}} && (2.7)\\
&= \vec{v}_{(\Re'/\Re)} + \vec{v}_{(M/\Re')} && (2.8)
\end{aligned}$$

L'expression $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right)$ n'a pas été explicitée dans le calcul ci-dessus pour des raisons de clarté essentiellement. Son expression est très simple : si $\vec{OO'} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$, alors $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}\left(\vec{OO'}\right) = \frac{da}{dt}.\vec{e_x} + \frac{db}{dt}.\vec{e_y} + \frac{dc}{dt}.\vec{e_z}$. Les termes en $\frac{d\vec{e_x}}{dt}$, $\frac{d\vec{e_y}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e_z}}{dt}$ sont nuls puisque $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes dans le référentiel absolu.

En pratique, lors du calcul de $\vec{v}_{(M/\Re')}$, il ne faut dériver par rapport au temps **que** les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{O'M}$: autrement dit, on considère ici que les vecteurs de base du référentiel relatif sont "fixes". Cette notion est exprimée à travers la notation $\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}$. Il faut imaginer que l'on place temporairement l'observateur dans le référentiel $\Re'$ indiqué par la notation $\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}$ avant de dériver par rapport au temps.

La vitesse d'entraînement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu fait intervenir un terme en $\frac{d}{dt}\big|_{\Re}(OO')$ qui traduit une vitesse de *translation*, tandis que le terme en $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \overrightarrow{O'M}$ traduit la rotation éventuelle du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu. N'oubliez pas ce terme lors de la composition des vitesses ! ! !

2.4 Composition du vecteur accélération

Pour établir la loi de composition du vecteur accélération, nous procédons exactement de la même manière que précédemment, en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse. Il vient :

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{(M/\Re)} &= \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{v}_{(M/\Re)}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{v}_{(\Re'/\Re)}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{\Re}\left(\vec{v}_{(M/\Re')}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + y'\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + z'\frac{d\vec{e'_z}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{e'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{e'_y}\frac{dz'}{dt}\vec{e'_z}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{e'_x}}{dt^2} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{e'_y}}{dt^2} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e'_z}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{e'_z}}{dt^2}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z}\right) + \left(x'\frac{d^2\vec{e'_x}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e'_y}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e'_z}}{dt^2}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z}\right) \\
&\qquad + \left[x'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e'_x}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e'_y}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{e'_z}\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z}\right) \\
&\qquad + \left[x'\left(\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \vec{e'_x} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d\vec{e'_x}}{dt}\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \vec{e'_y} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d\vec{e'_y}}{dt}\right) + z'\left(\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \vec{e'_z} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \left(2\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{e'_z}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z}\right) \\
&\qquad + \left[\frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \left(x'.\vec{e'_x} + y'.\vec{e'_y} + z'.\vec{e'_z}\right) + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(x'.\frac{d\vec{e'_x}}{dt} + y'.\frac{d\vec{e'_y}}{dt} + z'.\frac{d\vec{e'_z}}{dt} +\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + 2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{e'_x} + \frac{dy'}{dt}\vec{e'_y} + \frac{dz'}{dt}\vec{e'_z}\right)}_{\frac{d}{dt}\big|_{\Re'}(\overrightarrow{O'M})} + \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{e'_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{e'_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{e'_z}\right)}_{\frac{d^2}{dt^2}\big|_{\Re'}(\overrightarrow{O'M})} + \frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \underbrace{\left(x'.\vec{e'_x} + y'.\vec{e'_y} + z'.\vec{e'_z}\right)}_{\overrightarrow{O'M}} \\
&\qquad + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(x'.\vec{e'_x} + y'.\vec{e'_y} + z'.\vec{e'_z}\right)}_{\overrightarrow{O'M}}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\overrightarrow{O'M}\right)\right)}_{\vec{v}_{(M/\Re')}} + \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\overrightarrow{OM'}\right)}_{\vec{a}_{(M/\Re')}} \\
&= \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) + \frac{d\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{\vec{a}_{(\Re'/\Re)}} + 2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{v}_{(M/\Re')} + \vec{a}_{(M/\Re')} \\
&= \vec{a}_{(\Re'/\Re)} + \vec{a}_c + \vec{a}_{(M/\Re')}
\end{aligned}
$$

De la même manière que précédemment, l'expression $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right)$ n'a pas été explicitée dans le calcul ci-dessus pour des raisons de clarté essentiellement. Son expression est très simple : si $\overrightarrow{OO'} = a.\vec{e_x} + b.\vec{e_y} + c.\vec{e_z}$, alors $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re}\left(\overrightarrow{OO'}\right) = \frac{d^2a}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2b}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{d^2c}{dt^2}.\vec{e_z}$. Les termes en $\frac{d\vec{e_x}}{dt}$, $\frac{d\vec{e_y}}{dt}$ et $\frac{d\vec{e_z}}{dt}$ sont nuls puisque $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes dans le référentiel absolu.

La composition des accélérations fait naturellement apparaître une accélération d'entraînement d'un référentiel par rapport à l'autre ($\vec{a}_{(\Re'/\Re)}$) ainsi qu'une accélération relative ($\vec{a}_{(M/\Re')}$). Mais elle fait aussi apparaître un terme d'accélération supplémentaire : l'accélération de Coriolis ($\vec{a}_c$). Cette accélération n'a pas de sens physique évident : il s'agit d'un terme apparaissant de manière purement mathématique. En pratique, l'accélération de Coriolis est à l'origine de nombreux phénomènes physiques naturels dû à la rotation de la terre sur elle-même, tels que les vortex de courant marin ou atmosphérique, l'usure inégale des rails de train sur l'axe Paris-Marseille etc...

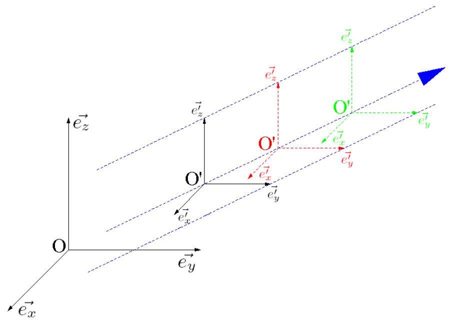
2.5 Exemples et discussion

2.5.1 Cas où le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est une translation

$\Re'$ est en translation par rapport à $\Re$ si les directions liées à $\Re'$ sont fixes dans $\Re$. Il vient : $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e'_y}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e'_z}\right) = 0$.

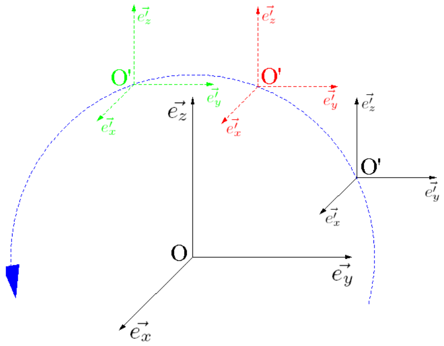
Translation rectiligne

Une translation est rectiligne si, en plus des conditions énoncées ci-dessus, l'origine O' de $\Re'$ a une trajectoire rectiligne par rapport à $\Re$. On a : $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \vec{0}$



Translation circulaire

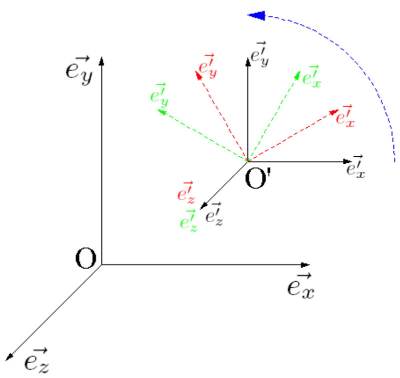
Une translation est circulaire si, en plus des conditions énoncées ci-dessus, l'origine O' de $\Re'$ a une trajectoire circulaire par rapport à $\Re$. On a : $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \vec{0}$



L'expression de la composition des vitesses devient : $\vec{v}_{(M/\Re)} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OO'}\right) + \frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)$

L'expression de la composition des accélérations devient : $\vec{a}_{(M/\Re)} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{OO'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)$

2.5.2 Cas où le mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$ est une rotation uniforme autour d'un axe fixe [Oz]



Dans ce cas, les directions des vecteurs de base liés à $\Re'$ ne sont pas fixes dans $\Re$. Il vient : $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_x}\right) \neq 0$, $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_y}\right) \neq 0$, $\frac{d}{dt}\left(\vec{e'_z}\right) \neq 0$. Par contre, le vecteur $\vec{OO'}$ est fixe, donc $\frac{d}{dt}\left(\vec{OO'}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{OO'}\right) = 0$. De plus, la rotation étant uniforme, autour de l'axe [Oz] $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \vec{C^{te}} = \omega.\vec{e_z}$ donc les termes en $\dot{\vec{\omega}}_{(\Re'/\Re)}$ valent zéro.

L'expression de la composition des vitesses devient :
$\vec{v}_{(M/\Re)} = \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M} + \frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)$

L'expression de la composition des accélérations devient :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{(M/\Re)} &= \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M}\right) + \left[2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)\right] + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)\\
&= \vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \left(\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{O'M}\right) + \left(2\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} \wedge \vec{v}_{(M/\Re')}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(\vec{O'M}\right)
\end{aligned}$$

Exemple : si $\vec{O'M} = A.t.\vec{e'_x}$ et $\vec{\omega}_{(\Re'/\Re)} = \omega.\vec{e_z}$, on a :
$\vec{a}_{(M/\Re)} = \omega.\vec{e_z} \wedge \left(\omega.\vec{e_z} \wedge A.t.\vec{e'_x}\right) + \left(2\omega.\vec{e_z} \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{(\Re')}\left(A.t\vec{e'_x}\right)\right) + \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\Re'}\left(A.t\vec{e'_x}\right)$
$\vec{a}_{(M/\Re)} = \omega.\vec{e_z} \wedge \left(A.\omega.t.\vec{e'_y}\right) + \left(2\omega.\vec{e_z} \wedge A.\vec{e'_x}\right) + 0$
$\vec{a}_{(M/\Re)} = -A.\omega^2.t.\vec{e'_x} + 2.\omega.A.\vec{e'_y}$

Chapitre 3

Dynamique

La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent. En physique contemporaine, ces "causes" portent aussi le nom d'interactions. En mécanique classique, les interactions sont décrites par des entités mathématiques (des vecteurs) appelées "les forces". En ce sens, l'étude de la dynamique est l'analyse de la relation entre les forces et les variations de mouvement d'un corps.

3.1 Masse et principe d'inertie

3.1.1 Notion de masse

La masse dite "inerte" est un coefficient (scalaire) caractéristique de chaque particule qui détermine le comportement de cette dernière lorsqu'elle interagit avec d'autre particules. En d'autres termes, la masse d'une particule caractérise sa réponse vis-à-vis d'une force. La masse est une grandeur additive dont l'unité est le Kilogramme. Ainsi, pour connaitre la masse d'un corps, il suffit d'additionner la masse de chacune des particules le constituant. En pratique, on obtient la masse d'un corps en le comparant à la masse d'un corps étalon en utilisant, par exemple, une balance. En mécanique classique, la masse est invariante dans le temps et ne dépend pas des référentiels : c'est une caractéristique intrinsèque d'un corps ou d'un point matériel.

Une autre définition de la masse peut aussi être proposée, à partir de l'interaction de gravitation entre deux points massiques. On parle alors de "masse grave". Il n'est pas évident, a priori, que les deux définitions de la masse coïncident. L'expérience montre cependant l'identité des deux masses avec une précision très élevée !

3.1.2 Principe d'inertie - 1^{re} loi de Newton

Le principe d'inertie (ou première loi de Newton) est énoncé de la façon suivante :

> Un point matériel isolé (n'étant soumis à aucune interaction) se déplace toujours avec une vitesse constante, c'est à dire sans accélération. Dans un référentiel Galiléen, la trajectoire d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

La masse constitue un rôle clef dans le principe d'inertie, puisqu'elle va caractériser la réponse d'un corps matériel vis-à-vis de son interaction avec d'autres corps. Par exemple, considérons un point matériel de masse M, isolé, ayant une trajectoire rectiligne uniforme dans un référentiel Galiléen. A un certain temps t, ce point matériel "ressent" une force $\vec{F}$ donnée (interaction à distance dû à un autre corps, ou collision). Si sa masse est très grande (M»1), cette force n'aura que peu d'influence sur la trajectoire du point matériel et ce dernier continuera sa course comme si rien ne s'était passé. Au contraire, si sa masse est très faible, la force qui lui est appliqué va brutalement l'accélérer, le décélérer, ou le faire changer de direction. Nous avons vu que les variations du mouvement (c'est à dire les variations du vecteur vitesse) représentent aussi la notion d'accélération... Il n'est donc pas étonnant, comme nous le verrons plus tard, que cette dernière soit égale au rapport de la force sur la masse : $\vec{a} = \vec{F}/M$...

Réciproquement, l'expression ci-dessus implique que plus un corps est massique, plus il faudra lui appliquer une force "conséquente" pour pouvoir le détourner de son mouvement rectiligne uniforme (dans un référentiel Galiléen). Ceci est valable pour accélérer un corps, pour le décélérer, ou bien simplement pour changer sa direction. Voici quelques exemples permettant d'apprécier qualitativement le principe d'inertie :

- Lorsqu'un avion A380 est à l'arrêt, sur la piste d'envol, il a besoin d'une force importante (plusieurs turbo-réacteurs) pour pouvoir prendre de la vitesse - c'est à dire accélérer - et enfin décoller. En effet, sa masse conséquente s'oppose à une quelconque variation de vitesse... L'avion, immobile au départ, "souhaite" le rester !

- Ce même avion (A380) s'apprête à atterrir... Une fois que les roues ont touché la piste d'atterrissage, la vitesse de l'avion est toujours très importante. De la même manière que précédemment, il est nécessaire de freiner "fort" pour pouvoir stopper l'avion : là encore, son inertie s'oppose à toute variation de vitesse, même s'il s'agit dans ce cas là, de la réduire. Initialement, l'avion possède une vitesse et "souhaite" la maintenir !

- Un moustique est en train de voler paisiblement à vitesse constante... lorsqu'une légère brise se lève ! Ce dernier va se mettre à tourbillonner au grès des mouvements d'air dans lesquels il se trouve. Ici, sa faible masse ne constitue pas un frein aux forces qui lui sont appliquées. Par conséquent, même si le moustique est soumis de très faibles forces, son accélération est grande et de ce fait, sa trajectoire va beaucoup varier.

Le concept d'inertie n'est pas propre à la mécanique. De nombreuses analogies peuvent être rencontrées dans d'autres domaines tels qu'en électricité ou en thermodynamique. Dans un circuit électrique, l'inertie est présente au travers de son inductance L, car cette grandeur représente la tendance naturelle d'un circuit à s'opposer à toutes **variations de courant**... En thermodynamique, l'inertie d'un corps est relié à sa capacité calorifique C, car cette grandeur contrôle les **variations de température** de ce dernier pour un même apport d'énergie. Poussons l'analogie jusqu'en Sciences Humaines : ne dit-on pas qu'un projet complexe présente beaucoup d'inertie lorsque son avancement (ou sa stagnation) est faible vis-à-vis de l'effort humain déployé ? Dans chacun de ces cas, plus l'inertie est grande, plus la réponse du système aux sollicitations extérieures sera faible.

3.2 Quantité de mouvement et chocs

3.2.1 Définition

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel est défini comme le produit de sa masse m par sa vitesse $\vec{v}$: $\vec{p} = m.\vec{v}$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, qui a la même direction que la vitesse. C'est une notion physique très importante car elle combine les deux éléments qui caractérise l'état dynamique d'un point matériel : sa masse et sa vitesse. Son unité est le $m.Kg.s^{-1}$ ($[L][M][T]^{-1}$). Il s'agit d'une quantité additive : si le système considéré est composé de plusieurs points matériels indexés par i, il vient :

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i.\vec{v}_i \qquad (3.1)}$$

La quantité de mouvement est une grandeur qui dépend du référentiel d'observation. Tout comme l'énergie, elle ne possède donc pas de "zero" absolu. Seules les variations de quantité de mouvement possèdent un sens physique !

3.2.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement

En mécanique classique, une interaction (une force) d'un corps sur un autre produit un échange de quantité de mouvement. La variation de la quantité de mouvement d'un corps dans un certain intervalle de temps est égale et opposée à la variation de la quantité de mouvement de l'autre corps pendant le même intervalle de temps.

Il est possible de généraliser cette expression et de la ré-écrire d'une manière plus formelle :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante} \\ \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = C^{te} \end{array}}$$

Il s'agit d'un principe physique *non-démontrable*. Il n'est justifié que dans la mesure où aucune expérience n'a pu l'infirmer [1].

3.2.3 Les chocs ou collisions

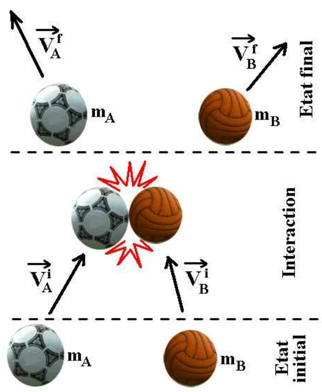
Lorsque deux corps s'approchent l'un de l'autre, leur interaction mutuelle modifie leur mouvement, produisant de ce fait un échange de quantité de mouvement et d'énergie. Lorsqu'un tel évènement se produit, il s'agit d'un choc. Cela ne signifie pas nécessairement que les deux corps ont été en contact l'un avec l'autre. En général, une interaction appréciable a lieu lorsque les corps sont proches l'un de l'autre, produisant une variation mesurable de leur mouvement pendant un temps relativement court. On distingue deux types de chocs : ceux dits "élastiques" et ceux dits "inélastiques".

Une étude approfondie des chocs à une dimension et à deux dimensions sera dispensée pendant la séance d'APP ! Ne négligez pas cette séance : les notions abordées sont essentielles et complètent le cours !

1. En réalité, il a fallut attendre l'avènement de la mécanique quantique et en particulier de la théorie QED (Quantum Electro Dynamics) pour mettre en défaut ce principe... Mais pour l'instant, ces considérations sortent largement du cadre de ce cours !

les chocs élastiques

Soit un système isolé constitué de deux corps massiques. Une collision entre ces deux corps est "élastique" lorsque la *quantité de mouvement* **et** *l'énergie cinétique* totale du système sont conservées entre les états initiaux et finals. Cela suppose, en particulier, que l'énergie interne des corps en question n'a pas été modifiée (échauffement, déformation, échange de matière, réaction chimique) au cours du choc.



Dans l'exemple ci-contre, un "point matériel" A de masse m_A et de vitesse initiale $\vec{v}_A^i$ entre en collision avec une autre "point matériel" B de masse m_B et de vitesse initiale $\vec{v}_B^i$. Après la collision, les masses respectives des points matériels A et B n'ont pas changé, mais leurs vitesses sont caractérisées par les vecteurs $\vec{v}_A^f$ et $\vec{v}_B^f$. Pour connaitre ces vitesses en fonction des paramètres initiaux, il suffit d'écrire le **système** d'équations suivant, caractérisant la conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}$ et de l'énergie cinétique E_c :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_A.(v_A^i)^2 + \frac{1}{2}m_B.(v_B^i)^2 = \frac{1}{2}m_A.(v_A^f)^2 + \frac{1}{2}m_B.(v_B^f)^2 \\ \\ m_A.\vec{v}_A^i + m_B.\vec{v}_B^i = m_A.\vec{v}_A^f + m_B.\vec{v}_B^f \end{cases}$$

Il ne reste plus alors qu'à projeter la seconde relation vectorielle sur les vecteurs de base du repère choisi, faisant apparaitre les composantes des vecteurs vitesses, puis à résoudre le système d'équation résultant !

les chocs inélastiques

Soit un système isolé constitué de deux corps massiques. Une collision entre ces deux corps est "inélastique" lorsque la *quantité de mouvement* **uniquement** du système est conservée entre les états initiaux et finals. Une collision inélastique suppose que l'énergie interne de l'un des corps (ou des deux) a été modifiée par échauffement, déformation ou échange de matière par exemple. Bien sûr, l'énergie totale du système (Énergie cinétique + Énergie interne) est toujours conservée dans un système isolé.

Photo ci-dessus : choc inélastique entre une balle de révolver et un oeuf. Une partie de l'énergie cinétique de la balle a été transférée à l'oeuf, pour le déformer et le faire exploser. Au cours de ce choc, la quantité de mouvement totale est conservée.

3.3 Notion de force

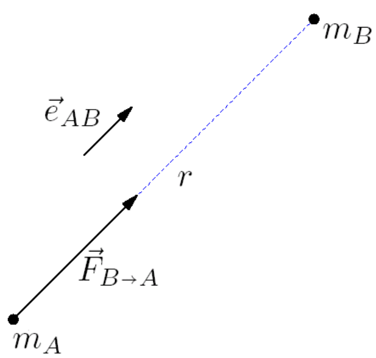
3.3.1 Généralités

L'ensemble des phénomènes physiques et chimiques observés sont basés sur la notion d'interaction, au cours de laquelle un échange d'énergie, de matière ou de quantité de mouvement a lieu entre deux entités physiques distinctes. Il existe 4 interactions fondamentales de nature différentes : l'interaction gravitationnelle, l'interaction faible, l'interaction forte et l'interaction électromagnétique. Nous avons déjà mentionné que, en mécanique classique, les interactions entre points matériels peuvent être décrites par des grandeurs vectorielles appelées "forces". L'ensemble des forces observées dans la nature ne sont que la manifestation macroscopique des 4 interactions décrites ci-dessus. Nous admettrons que les forces ne dépendent pas du référentiel d'observation. La force résultant de plusieurs actions mécaniques est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions.

L'unité de force est le Newton (N). on a $1N = 1Kg.m.s^{-1}$. Sa dimension est : $[M][L][T]^{-1}$. En mécanique, on définit le "point d'application" d'une force comme étant l'endroit du système sur lequel la force en question s'exerce. Les forces sont dites ponctuelles lorsqu'elle sont appliquées en un point particulier du corps étudié, ou bien reparties lorsqu'elles s'exercent sur une surface (ou un volume) non-réduit à un point. Cependant, les forces sont avant tout des vecteurs et d'un point de vue mathématique, la notion de "point d'application" n'existe pas !

3.3.2 Les forces usuelles

La force de gravitation

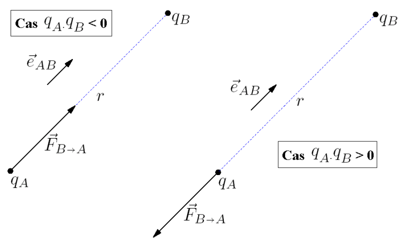


La force gravitationnelle est une force toujours attractive qui agit entre deux corps massifs. L'expression de la force exercée par un corps B de masse m_B sur un corps A de masse m_A se note :

$$\vec{F}_{B\rightarrow A} = G.\frac{m_A.m_B}{r^2}\ \vec{e}_{AB}$$

où r est la distance entre les corps A et B, $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé selon $\vec{AB}$ et $G = 6.67.10^{-11}\ m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation. L'intensité de la force gravitationnelle est extrêmement faible (c'est la plus faible des quatre interactions fondamentales). Ainsi, ses effets ne sont perceptibles que lorsque des objets très massifs sont en jeu.

La force électrique (ou force de Coulomb)



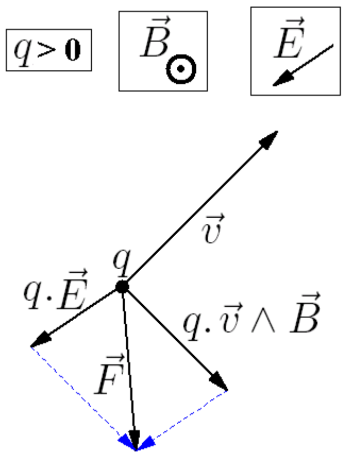
La force électrique traduit l'interaction entre deux corps ponctuels A et B portant respectivement les charges q_A et q_B. S'ils sont séparés d'une distance r, la force exercée par le corps B sur le corps A est :

$$\vec{F}_{B\to A} = -k.\frac{q_A.q_B}{r^2}\ \vec{e}_{AB}$$

ou $k \approx 9.10^9\ Kg.m^3.A^{-2}.s^{-4}$ est la constante de Coulomb et $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé selon $\vec{AB}$. Si les charges sont de même signe, elles ont tendance à se repousser. Si elles sont de signes différents, elle ont tendance à s'attirer.

Les forces électrostatiques peuvent quelques fois se manifester à l'échelle macroscopique (attirance ou répulsion entre deux objets chargés) mais leur portée reste cependant relativement faible. En effet, la matière est globalement neutre à l'échelle macroscopique : électrons et protons jouent des rôles antagonistes, les uns annulant les effets des autres.

La force électromagnétique (ou force de Lorentz)

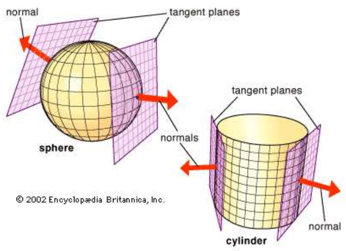


La force électromagnétique traduit l'interaction entre une particule chargée (de charge q), ayant une vitesse $\vec{v}$, avec un champ magnétique $\vec{B}$ et électrique $\vec{E}$. Mathématiquement, elle est notée :

$$\vec{F} = q.\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

Nous notons que le champ électrique $\vec{E}$ est généré par des charges et, en l'absence de champ magnétique, la force de Lorentz est équivalente à la force de Coulomb. Le champ magnétique $\vec{B}$, quand à lui, est génère par des charges en mouvement (courant électrique). On montre cependant que le champ magnétique n'est que la conséquence de la déformation relativiste du champ électrique. Fondamentalement, la force électromagnétique n'est qu'une seule et même force, basée sur l'interaction entre deux particules chargées. En pratique, il est cependant beaucoup plus aisé d'introduire le champ "électrique" et "magnétique" dans le traitement des forces électromagnétiques.

Les forces de contact

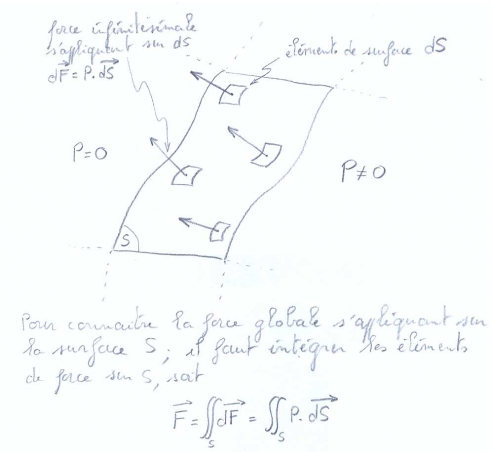


Forces de contact appliquees par la sphere (le cylindre) sur les plans tangents

Les forces de contact, aussi appelées forces de réaction, sont toujours dirigées selon la normale à la surface de contact (plan tangent) entre deux corps (pour cette raison, elles sont souvent représentées par la notation $\vec{N}$). Les forces de contact traduisent le fait que deux corps solides ne peuvent pas s'interpénétrer. En effet, lorsque deux corps solides sont suffisamment proches l'un de l'autre, les noyaux (charges positives) des atomes dont ils sont constitués se repoussent fortement (sauf s'il y a réaction chimique !). Microscopiquement, la force de Coulomb est donc bien à l'origine des forces de contacts.

Le terme "force de contact" prête à confusion : tout comme la force gravitationnelle, la force de Coulomb agit "à distance" et les noyaux des différents corps n'ont pas besoin de "se toucher" pour exercer une force l'un sur l'autre. Les interactions élémentaires traduisant les forces de contact ont bien lieu "à distance", mais cette dernière est si petite à notre échelle que nous avons tendance à extrapoler et à penser qu'elle est nulle.

Relation entre force et pression

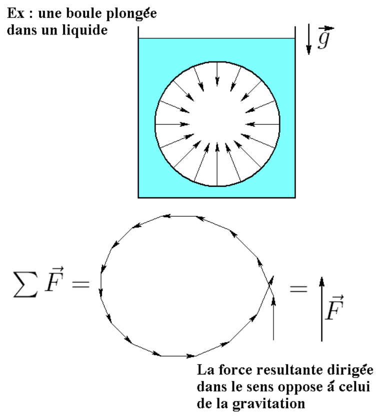


Par définition, la pression correspond à une force par unité de surface. Son unité élémentaire est N/m^2 (ou $Kg/m/s^2$), bien que l'on utilise aussi le Bar, le Pascal ou "mm de Hg". Lorsqu'une force agit ponctuellement, la notion de pression n'a évidement pas de sens... Le concept de pression, bien que général, est particulièrement adapté lorsque l'on considère des forces hydrostatiques. Ces dernières s'appliquent sur un objet lorsqu'il est plongé dans un liquide ou un gaz : microscopiquement, chacune des molécules en contact avec l'objet exercent de très petites "forces de contact" (i.e ; collision des molécules avec la surface de l'objet). Leur très grand nombre, leur action répétée dans le temps et leur répartition uniforme à la surface de l'objet contribue à les assimiler à une force constante. Considérons un élément de surface $d\vec{S}$ de l'objet soumis à la pression P, la force résultante (sur l'élément de surface considéré) sera donnée par : $d\vec{F} = P.d\vec{S}$. Pour obtenir la force globale appliquée sur l'objet, il suffit d'intégrer cette expression sur l'ensemble de sa surface S soumis à la pression P, soit $\vec{F} = \iint\limits_S P.d\vec{S}$.

Lorsque la pression est constante et que la surface S d'un objet est fermée, on remarque naturellement que la force globale appliquée sur l'objet est nulle. Cependant, lorsque la pression s'exerçant sur les parois d'un objet de surface fermée n'est pas uniforme, soit $P_i = P_{(x_i,y_i,z_i)}$, il en résulte une force globale susceptible de le déplacer. L'exemple le plus concret est certainement donné par "la poussée d'Archimède" détaillée ci-dessous.

La force d'Archimède

Énoncé du principe d'Archimède : tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) soumis à un champ de gravité, subit une force égale au poids du fluide déplacé par le corps. La direction de cette force est la même que celle du champ de gravité, mais son sens est opposé.
Soit une boule de volume V complètement immergée dans un liquide de masse volumique ρ. Le système est soumis au champ de gravitation terrestre $\vec{g} = -g.\vec{e}_z$. L'expression de la force d'Archimède s'écrit :



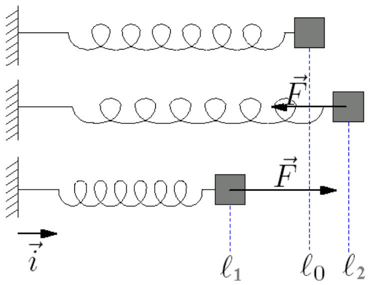
$$\vec{F} = \rho.V.g.\vec{e}_z$$

Cette force provient de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur : la pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale orientée vers le haut.

La force de rappel d'un ressort

La force de rappel d'un ressort s'exprime par :

$$\vec{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,.\vec{i} \qquad \text{[valable uniquement pour } (\ell - \ell_0) << \ell_0\text{]}$$



ou k $(N.m^{-1})$ est une constante caractéristique du ressort appelée "raideur du ressort", ℓ_0 est la longueur à vide du ressort et ℓ est la longueur à un instant t du ressort. $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dirigé dans l'axe du ressort et orienté depuis son point d'attache jusqu'a son extrémité. La force de rappel change en amplitude et en sens selon la longueur du ressort. Microscopiquement, ce sont encore les forces de Coulomb qui sont responsables de la force de rappel !

Les forces de frottement

Les forces de frottement sont dûes à l'interaction entre les molécules de deux corps. Là encore, l'interaction élémentaire est la force de Coulomb. Le phénomène microscopique est très compliqué et dépend de nombreux facteurs tels que l'état, la nature et la vitesse des surfaces en glissement l'une par rapport à l'autre. On distingue deux types de frottement :

– Frottement de glissement solide
La force de frottement de glissement solide s'oppose toujours au mouvement du corps, et par conséquent a un sens opposé à la vitesse. Expérimentalement, la force de frottement de glissement solide $\vec{F_g}$ peut être considérée comme proportionnelle au module de la force de réaction $\|\vec{N}\|$.

$$\vec{F_g} = -f.\|\vec{N}\|.\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

où f est un coefficient de frottement sans unité et $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ désigne un vecteur unitaire dirigé selon la direction de $\vec{v}$. On distingue deux types de coefficients de frottement : f_s est le coefficient statique de frottement qui, lorsque multiplié par $\|\vec{N}\|$, donne la force minimum nécessaire pour mettre un mouvement relatif deux corps initialement en contact et immobiles l'un par rapport à l'autre. f_c est le coefficient cinétique de frottement qui, lorsque multiplié par $\|\vec{N}\|$, donne la force nécessaire pour maintenir deux corps en mouvement relatif uniforme. On note que $f_s > f_c$. En général, les coefficients de frottement sont soit des inconnues, soit des paramètres du problème.

- Frottement visqueux
Lorsqu'un corps se déplace dans un fluide (liquide ou gaz) à une vitesse relativement faible, la force de frottement est, en première approximation, proportionnelle à la vitesse, et de direction opposée.

$$\vec{F_v} = -\kappa.\eta.\vec{v} \quad \text{[valable uniquement pour de faibles vitesses !]}$$

ou κ est un coefficient lié à la forme du corps [2] et η est le coefficient de viscosité ($Pa.s^{-1}$ ou $Kg.m^{-1}.s^{-1}$) du fluide considéré.

3.4 Formulation de la RFD dans un référentiel Galiléen - deuxième loi de Newton

Dans la section 1.2 (principe d'inertie), nous avons vu comment les forces (ou les interactions) étaient à l'origine du mouvement des corps. Dans le chapitre 3, nous avons établi l'ensemble des relations cinématiques (position, vitesse et accélération) permettant de décrire mathématiquement n'importe quel type de mouvement... Mais nous ne savons toujours pas comment relier ces deux notions ! Comment décrire le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces ?

Et puis, Sir Isaac Newton écrit...

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

La Relation Fondamentale de la Dynamique qui devient, lorsque la masse ne varie pas au cours du temps...

$$\boxed{\sum \vec{F} = m.\vec{a}}$$

Cette relation, **valable uniquement dans un référentiel Galiléen**, établit le lien entre dynamique et cinématique, entre forces et accélération. Il s'agit d'une relation vectorielle. A travers cette relation, la masse d'un corps prend désormais un sens physique simple : elle conditionne la réponse d'un système (son accélération) lorsque ce dernier est soumis à des forces (les causes du mouvement). Elle exprime mathématiquement le principe d'inertie.

Dans le cas où la masse du système évolue au cours du temps, il convient d'utiliser l'expression

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = \frac{dm}{dt}.\vec{v} + m.\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{dm}{dt}.\vec{v} + m.\vec{a}$$

Il est nécessaire alors de connaitre la loi d'évolution de la masse du système au cours du temps.

3.5 Principe d'action et de réaction - troisième loi de Newton

Soit un système de deux corps A (de masse m_A) et B (de masse m_B), chargés positivement (q_A et q_B) et initialement très loin l'un de l'autre de manière à ce que leur interaction puisse être négligée. Nous supposons que le système (les deux corps) est isolé, et que les vitesses des deux corps sont opposées l'une de l'autre. La quantité de mouvement initiale du système vaut : $\vec{p} = m_A.\vec{v_A} + m_B.\vec{v_B}$. Le problème est unidimensionnel (1D). Au bout d'un certain temps, les corps vont se rapprocher l'un de l'autre de manière à ce que la force électrique exercée par le corps B sur le corps A ne puisse plus être négligée. Le corps A ressent donc une force, et sa vitesse va changer. Cependant, nous avons vu, dans la section 5.2, que la quantité de mouvement d'un système isole était toujours conservée au cours du temps. Si la vitesse du corps A change, la vitesse du corps B doit aussi changer de manière à garder la quantité de mouvement constante. Mais puisque la vitesse du corps B change, cela signifie qu'il est lui aussi soumis à une force : la force électrique exercée par le corps A sur le corps B.

$$\begin{aligned}
\vec{p} = m_A.\vec{v_A} + m_B.\vec{v_B} &= C^{te} \\
\frac{d}{dt}(m_A\vec{v_A} + m_B.\vec{v_B}) &= \frac{d}{dt}\left(C^{te}\right) = 0 \\
\frac{d}{dt}(m_A.\vec{v_A}) &= -\frac{d}{dt}(m_B.\vec{v_B}) \\
m_A.\vec{a_A} &= -m_B.\vec{a_B} \\
\vec{F}_{B\to A} &= -\vec{F}_{A\to B}
\end{aligned}$$

Cet exemple simple peut être généralisé à trois dimensions et à tous les types de force. Il traduit le principe de l'action et de la réaction, énoncé de la manière suivante :

> Lorsque deux particules sont en interaction, la force qui s'exerce sur une particule est égale et opposée à la force qui s'exerce sur l'autre

2. Son unité est le m ([L]). Par exemple, pour un sphère de rayon R, $\kappa = 6\pi R$

Remarque : Le principe d'action-réaction sous-entendrait-il que les forces se compensent constamment les unes avec les autres, empêchant par là-même toute forme de mouvement ? Rappelons que cette affirmation n'est vraie que pour un système isolé. Si le système étudié n'est pas un système isolé, alors il ne faut considérer que la (les) force(s) agissant sur le système en question seulement ! Pour résoudre correctement un problème de mécanique, la première étape consiste à bien choisir le système, puis à bien savoir distinguer les forces qui agissent sur ce dernier de celles qui agissent sur d'autres systèmes.

3.6 Formulation de la RFD dans un référentiel non-Galiléen

Supposons un référentiel galiléen $\Re$, et un référentiel relatif non-galiléen $\Re'$. Nous souhaitons étudier un problème mécanique dans le référentiel relatif $\Re'$. Or nous savons que la relation fondamentale de la dynamique (RFD) n'est valable que dans un référentiel galiléen $\Re$. De quelle manière est transformée la RFD lorsqu'elle doit être appliquée dans un référentiel non-galiléen ?

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= m.\vec{a}_{(M/\Re)} \qquad \text{(dans } \Re\text{)} \\
\sum \vec{F} &= m.\left(\vec{a}_{(\Re'/\Re)} + \vec{a_c} + \vec{a}_{(M/\Re')}\right) \\
\sum \vec{F} &= m.\vec{a}_{(\Re'/\Re)} + m.\vec{a_c} + m.\vec{a}_{(M/\Re')} \\
\sum \vec{F} &= \vec{F_e} + \vec{F_c} + m.\vec{a}_{(M/\Re')} \\
\left(\sum \vec{F}\right) - \vec{F_e} - \vec{F_c} &= m.\vec{a}_{(M/\Re')}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\sum \vec{F}\right) - \vec{F_e} - \vec{F_c} = m.\vec{a}_{(M/\Re')}}$$

Nous avons deja vu que l'expression des forces ne dépend pas du référentiel, ainsi le terme $\left(\sum \vec{F}\right)$ n'est pas modifié dans la séquence d'équations ci-dessus. Le terme d'accélération $\vec{a}_{(M/\Re)}$ est simplement remplacé par celui de l'accélération relative $\vec{a}_{(M/\Re')}$. Cependant, l'expression de la RFD dans un référentiel non-galiléen fait intervenir des pseudo-forces $\vec{F_c}$ et $\vec{F_e}$, respectivement force de Coriolis et force d'entrainement, qu'il est nécessaire de rajouter (ou pour être plus précis, de soustraire aux forces appliquées sur le système)

Dans certains ouvrages, les forces d'entrainement et de Coriolis sont définies avec un signe opposé. Le tout est de bien savoir s'il faut "ajouter" ou "soustraire" ces forces en fonction de la convention de signe choisie

Remarque 2 : en pratique, pour calculer les pseudo-forces, il est nécessaire de connaitre l'accélération d'entrainement et de Coriolis du référentiel non-galiléen... cela suppose aussi de connaitre le mouvement de ce référentiel par rapport à un autre, galiléen quand à lui. On comprend alors pourquoi l'utilisation de la RFD dans un référentiel non-galiléen est relativement limitée : dans tous les cas, il est nécessaire d'avoir recours à un référentiel galiléen à un moment ou à un autre.

3.7 Théorème du moment cinétique

3.7.1 De la RFD au théorème du moment cinétique...

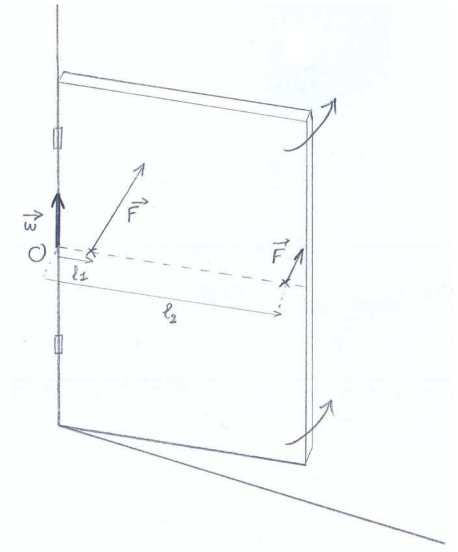
Reprenons l'expression de la relation fondamentale de la dynamique, et multiplions-la à droite et à gauche par $\vec{OM}\wedge$...

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= m.\vec{a} \\
\vec{OM} \wedge \left(\sum \vec{F}\right) &= \vec{OM} \wedge (m.\vec{a}) \\
\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) &= \vec{OM} \wedge \left(m.\frac{d}{dt}\vec{v}\right) \\
\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge (m.\vec{v})\right) - \frac{d}{dt}\vec{OM} \wedge m.\vec{v} \\
\sum \left(\vec{OM} \wedge \vec{F}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge (m.\vec{v})\right) - \underbrace{m.\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum\left(\vec{OM}\wedge\vec{F}\right) \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}\wedge\vec{p}\right)}$$

ou $\vec{\tau}=\vec{OM}\wedge\vec{F}$ est le **moment d'une force** par rapport au point O, et $\vec{L}=\vec{OM}\wedge\vec{p}$ est le **moment cinétique** du système en considération par rapport au point O. La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule est égale au moment de la force qui lui est appliquée, quand les deux sont mesurés par rapport au même point.

Concrètement, le moment cinétique peut-être assimilé à "une quantité de rotation". Intuitivement, nous imaginons bien qu'une particule tournant très vite autour d'un point avec une orbite très petite serait susceptible de posséder une "quantité de rotation" équivalente à une particule tournant lentement autour d'un point avec une orbite très grande. Considérons le cas de deux toupies tournant sur elles-même et que l'on souhaiterai mettre à l'arrêt en appuyant sur leurs axes de rotation avec notre doigt. Imaginons que les deux toupies ont la même masse : pour l'une d'elle la masse est concentrée près de l'axe, pour l'autre elle est surtout présente en périphérie de la toupie. Si les deux toupies possède la même vitesse angulaire initiale $\frac{d\theta}{dt}$, nous aurons certainement plus de mal à mettre à l'arrêt la deuxième toupie plutôt que la première. Ceci car la masse de la deuxième toupie est plus éloignée de l'axe de rotation que dans le cas de la première toupie. Malgré leur vitesse angulaire égale, la deuxième toupie possède un moment cinétique (ou "quantité de rotation") plus grand que la deuxième.



Le moment d'une force caractérise "l'effet produit" par cette force vis-à-vis d'un mouvement de rotation du système considéré. Considérons l'exemple ci-contre où vous souhaitez ouvrir une porte initialement immobile. Vous avez le choix de procéder de deux manière différentes : soit vous poussez la porte très fort en un point proche de l'axe... soit vous poussez légèrement la porte en un point loin de l'axe. Dans le deux cas, le résultat sera le même... C'est à dire "le taux de mise en rotation" de la porte sera le même !. Or, ce que l'on vient de qualifier comme "le taux de mise en rotation" est une quantité physique bien déterminée : il ne s'agit ni plus ni moins que la dérivée de la "quantité de rotation".

Ainsi, nous avons souvent coutume de dire que "le théorème de l'énergie cinétique" est l'équivalent de la "relation fondamentale de la dynamique" appliquée à la rotation.

3.7.2 Le cas des forces centrales

Une force dont la direction passe toujours par un point fixe est appelée "force centrale". Ainsi, en vertu du théorème du moment cinétique, lorsqu'une particule se déplace sous l'action d'une force centrale, son moment cinétique reste constant. La réciproque est également vraie. Ce résultat est important car beaucoup de forces dans la nature sont centrales, telles que la force de gravitation ou bien la force électrique. Le fait que le moment cinétique d'un point matériel soumis à l'action de forces centrales reste constant donne lieu à deux conséquences importantes :

Le mouvement est plan

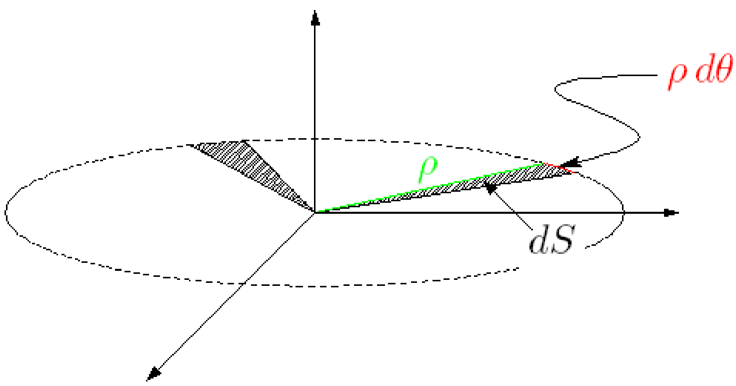
Puisque $\vec{L}$ est un vecteur fixe dans l'espace, sans cesse perpendiculaire à $\vec{OM}$, alors la trajectoire de M est contenue dans un plan fixe perpendiculaire à $\vec{L}$.

Le mouvement obéit à "la loi des aires"

Une force centrale peut s'exprimer de la manière suivante : $\vec{F} = \alpha_{(t)}.\frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$ où $\alpha_{(t)}$ est un scalaire. On suppose qu'il s'agit déjà de la somme vectorielle de toutes les forces centrales susceptibles d'être appliquées au système. Dans le repère polaire, on a, de manière générale : $\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho}$ et $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_i \vec{F_i} &= \frac{d}{dt}\vec{L} \\
\vec{OM} \wedge \vec{F} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge m.\vec{v}\right) \\
\underbrace{\vec{OM} \wedge \alpha_{(t)}.\frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}}_{=0 \ car\ \vec{OM}\wedge\vec{OM}=0} &= \frac{d}{dt}\left(\rho.\vec{e_\rho} \wedge m.\left[\frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right)\right] \\
0 &= \frac{d}{dt}\left[m\rho.\frac{d\rho}{dt}.\underbrace{(\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\rho})}_{=0} + m.\rho^2\frac{d\theta}{dt}(\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\theta})\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{C^{te}} &= m.\rho^2\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_z} \\
\frac{\vec{C^{te}}}{m} &= \rho.\rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_z} \\
\frac{\vec{C^{te}}}{m} &= 2\frac{dS}{dt}.\vec{e_z} \\
\text{Soit...}\ \frac{C^{te}}{2m} &= \frac{dS}{dt}
\end{aligned}$$



La rayon vecteur $\vec{OM}$ balaye des aires égales égales pendant des intervalles de temps égaux. La constante C^{te} est appelée "la constante de la loi des aires".

3.8 Considérations générales sur la résolution d'un problème de mécanique

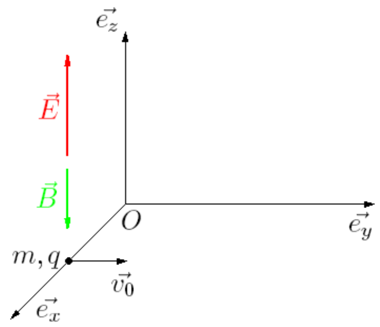
En général, la résolution d'un problème de mécanique est très méthodique. Les principales étapes de résolution sont présentées ci-dessous. Cependant, à ce stade du cours, vous devriez déjà posséder une intuition plus ou moins complète de la mécanique qui peut vous permettre de "passer" certaines étapes.

EXEMPLE

On cherche à établir les équations horaires s'une particule de masse m, de charge q soumis dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ uniformes dirigés selon $\vec{e_z}$ et $-\vec{e_z}$ respectivement. A l'instant initial, la particule se trouve sur l'axe [Ox), à une distance x_0 de O. La vitesse initiale $\vec{v_0}$ est parallèle à l'axe [Oy) (voir schéma ci-dessous). De plus, on considère que $v_0 = \frac{qB}{m}.x_0$

3.8.1 Choix du systeme

Même si cette étape semble superflue (ou bien tellement évidente qu'il n'est peut-être pas nécessaire de la mentionner) *ne la négligez pas !*. Le choix du système est très important afin d'établir par la suite le "bilan des forces". En effet, seules les forces appliquées sur le système choisi devront être prises en considération. Les forces internes au système, ou bien s'appliquant à des objets extérieurs au système, devront être ignorées. Si votre système est mal défini, vous aurez du mal à faire le tri parmi les nombreuses forces mises en jeu dans un problème de mécanique (ex : dois-je considérer la force d'action, ou de réaction ?)



Ici, le système est "la particule". Ce cas est relativement simple puisque la particule n'est pas en interaction avec d'autres corps...

3.8.2 Choix du référentiel

Lorsque celui-ci ne vous est pas imposé, choisissez votre référentiel avec soin. Les équations du mouvement peuvent être soit très simples, soit très compliquées en fonction du référentiel choisi. Par exemple, le mouvement des planètes du système solaire est relativement simple lorsque vu depuis le soleil (dans le référentiel de Copernic)... mais elles deviennent très vite compliquées lorsque le référentiel choisi est lié à la terre.

En anticipant la trajectoire de votre système, cette dernière peut-elle s'exprimer comme une combinaison de plusieurs mouvements simples ? Si oui, optez pour une résolution grâce à un changement de référentiel. Vous gagnerez en clarté et traiterez chacun des mouvements individuellement ! (Ex : le mouvement cycloïdal ou hélicoïdal peut être vu comme un mouvement de rotation combiné à un mouvement de translation...)

Nous cherchons à établir l'équation horaire du mouvement dans le référentiel du laboratoire. Étant donné que nous analysons l'effet de la force de Lorentz pour la première fois, nous n'avons *a priori* aucune indication sur la nature du mouvement... il est donc difficile d'anticiper la trajectoire de la particule dès à présent, et donc de choisir un autre référentiel (relatif) dans lequel le mouvement serait plus simple à analyser.

3.8.3 Choix du repère

Lorsque celui-ci ne vous est pas imposé, choisissez votre repère d'espace avec le plus grand soin. Là encore, les équations du mouvement peuvent être soit très simples, soit très complexes en fonction du repère choisi. Aidez-vous de la dimension et des symétries du problème pour choisir votre repère d'espace. Inutile de choisir le repère sphérique lorsque l'on doit décrire un mouvement rectiligne ! De la même manière, privilégiez le repère sphérique lorsque le système est soumis à l'action d'une force centrale...

De la même manière que précédemment, nous ne sommes pas en mesure d'anticiper le mouvement... Nous choisissons d'utiliser le repère cartésien, en espérant que nous avons fait le bon choix !

(Dans un deuxième temps, nous verrons que le repère cylindrique est beaucoup plus adapté à la résolution du problème !)

3.8.4 Bilan des forces

Dressez la liste de toutes les forces susceptibles d'agir sur le système. Trouvez leur expression mathématique grâce aux paramètres du problème, et exprimez-les selon les vecteurs de base du repère choisi.

Ici, la seule force qui s'applique sur le système est la force de Lorentz. Son expression mathématique est :

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\\
\vec{F} &= q\left[E.\vec{e_z}+(v_x.\vec{e_x}+v_y.\vec{e_y}+v_z.\vec{e_z})\wedge -B.\vec{e_z}\right]\\
\vec{F} &= q.E.\vec{e_z}-q.v_x.B\left(\vec{e_x}\wedge\vec{e_z}\right)-q.v_y.B\left(\vec{e_y}\wedge\vec{e_z}\right)\\
\vec{F} &= q.E.\vec{e_z}+q.v_x.B.\vec{e_y}-q.v_y.B.\vec{e_x}
\end{aligned}$$

3.8.5 Cinématique

Établissez l'expression du vecteur accélération de votre système selon les vecteurs de base du repère choisi. Deux manières de procéder sont possibles :

– Établissez d'abord l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ et dérivez-le pour obtenir la vitesse $\vec{v}$. Puis dérivez le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération $\vec{a}$.

– Reprenez les "formules" générales de l'accélération démontrées dans le cours, et supprimez les éléments nuls en analysant les symétries, la dimension ainsi que les autres données du problème (par exemple si $\omega=\dot{\theta}=C^{te}$, alors $\ddot{\theta}=0$).

Si vous avez opté pour un changement de référentiel, n'oubliez pas de calculer les accélérations de Coriolis et d'entrainement !

Dans le repere cartesien, on a :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x}+\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y}+\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}$$

En l'état actuel de nos connaissances, il est impossible de faire des hypothèses sur la dimension et sur les symétries du mouvement afin d'éliminer des termes dans l'expression générale de l'accélération. Nous choisissons donc de garder tous les termes !

En général, garder systématiquement tous les termes de l'accélération n'est pas faux, mais peut alourdir les équations et risque de déboucher sur des évidences (équations de type "0=0"). Par contre, supprimer par erreur un des termes de l'accélération qui n'est pas nul conduit à des erreurs graves !

3.8.6 Dynamique

A ce stade de la résolution du problème, vous possédez l'expression mathématique des forces appliquées au système et l'expression mathématique de son vecteur accélération. Il ne vous reste plus qu'à appliquer la relation fondamentale de la dynamique (ou le théorème du moment cinétique, le cas échéant). Vous obtenez une relation vectorielle, qu'il ne reste plus qu'à projeter sur les vecteurs de base du repère d'espace.

$$\begin{aligned}
\sum\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt}=m.\vec{a}\\
q.E.\vec{e_z}+q.v_x.B.\vec{e_y}-q.v_y.B.\vec{e_x} &= m.\left(\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x}+\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y}+\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\right)
\end{aligned}$$

Projection sur les axes...

$$\begin{cases}-q.v_y.B=m.\frac{d^2x}{dt^2} & \text{(RFD selon } \vec{e_x})\\ q.v_x.B=m.\frac{d^2y}{dt^2} & \text{(RFD selon } \vec{e_y})\\ q.E=m.\frac{d^2z}{dt^2} & \text{(RFD selon } \vec{e_z})\end{cases}$$

3.8.7 Résolution mathématique du problème

Après la projection de la RFD sur les vecteurs de base du repère, vous obtenez en général un **système d'équations différentielles non-linéaires couplées**, le plus souvent du **second ordre**, que vous devez résoudre.

– **Système** : signifie que vous avez trois équations (si votre problème est 3D), ou deux équations (si le problème est 2D) ou bien une seule (problème 1D) que vous devez résoudre simultanément. Il est conseillé d'utiliser la méthode de Gauss (ou méthode du pivot) pour la résolution des systémes.

La troisième équation peut être traitée indépendamment des deux premières : en effet, la coordonnée z n'apparaît que dans la troisième équation, et n'est pas couplée avec les coordonnées x ou y ou leurs dérivées. Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{qE}{m} \text{ soit } \frac{dz}{dt}=\frac{qE}{m}.t+C_1\\
z(t) &= \frac{qE}{2m}.t^2+C_1.t+C_2
\end{aligned}$$

Or, a $t=0$, $z(t=0)=0$ et $v_z(t=0)=0$ donc $C_1=0$ et $C_2=0$

$$\boxed{z_{(t)} = \frac{qE}{2m}.t^2}$$

- **équation différentielle** : signifie une relation entre une fonction et ses différentes dérivées. Si vous avez opté pour un repère cartésien en trois dimensions par exemple, vous devrez trouver trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ obéissant simultanément à trois équations dans lesquelles apparaitront, en général : $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

- **couplées** : signifie que les coordonnées du système ainsi que leurs dérivées (par exemple $\ddot{r}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, r, θ et ϕ dans le repère sphérique) sont susceptibles d'apparaitre dans chacune des équations du système. Le choix d'un bon repère d'espace, tenant compte des symétries du problème, permet quelques fois de découpler les équations du système, qui peuvent alors être traitées individuellement !

- **second ordre** : l'ordre d'une équation différentielle correspond à l'ordre de dérivation le plus élevé de la fonction qui intervient dans cette relation. En mécanique classique, le système d'équations différentielles couplées, permettant de trouver les équations horaires du mouvement, est obtenu à partir de la relation fondamentale de la dynamique qui fait intervenir l'accélération du système... c'est à dire la dérivée seconde des coordonnées. Il n'est donc pas étonnant que les équations différentielles d'un problème de mécanique soient nécessairement du second ordre.

- **non-linéaire** : signifie que des termes non-linéaires (ex : $\sin\theta$, ρ^2) sont présents dans les équations. Ces termes sont relativement "ennuyeux" car il devient très difficile de trouver une solution analytique au problème. Deux alternatives sont possibles : soit nous utilisons un ordinateur pour résoudre ces équations (méthodes numériques), soit nous "linéarisons" les équations (en effectuant un développement limité des termes non-linaires) afin de trouver une solution certes approchée, mais analytique...

Les deux premières équations du système doivent être traitées "ensemble" : elles sont couplées.

$$\begin{matrix}(1)\\ \\(2)\end{matrix}\begin{cases}-q.v_y.B = m.\frac{d^2x}{dt^2}\\ \\ q.v_x.B = m.\frac{d^2y}{dt^2}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\ \\(2)\end{matrix}\begin{cases}-q.v_y.B = m.\frac{dv_x}{dt}\\ \\ q.v_x.B = m.\frac{dv_y}{dt}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\ \\(2)\end{matrix}\begin{cases}v_y = -\frac{m}{q.B}.\frac{dv_x}{dt}\\ \\ q.v_x.B = m.\frac{dv_y}{dt}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\ \\(2)\end{matrix}\begin{cases}\frac{dv_y}{dt} = -\frac{m}{q.B}.\frac{d^2v_x}{dt^2}\\ \\ q.v_x.B = m.\frac{dv_y}{dt}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\ \\(2) = (1)\ dans\ (2)\end{matrix}\begin{cases}\frac{dv_y}{dt} = -\frac{m}{q.B}.\frac{d^2v_x}{dt^2}\\ \\ q.v_x.B = -\frac{m^2}{q.B}.\frac{d^2v_x}{dt^2}\end{cases}$$

La résolution "symétrique" du système (c'est à dire que l'on élimine v_x au profit de v_y) conduit à une équation similaire : $q.v_y.B = -\frac{m^2}{q.B}.\frac{d^2v_y}{dt^2}$

$$\begin{matrix}(1)\\ \\(2)\end{matrix}\begin{cases}\frac{d^2v_y}{dt^2} + \left(\frac{q.B}{m}\right)^2.v_y = 0\\ \\ \frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{q.B}{m}\right)^2.v_x = 0\end{cases}$$

A présent, les deux équations peuvent être résolues [a] indépendamment l'une de l'autre, on pose $\omega = \frac{qB}{m}$:
$v_x(t) = Ae^{i.\omega.t} + Be^{-i.\omega.t}$
$v_y(t) = A'e^{i.\omega.t} + B'e^{-i.\omega.t}$
où A, B, A' etB' sont des constantes.

Après dérivation, il vient :
$a_x(t) = A.i.\omega.e^{i.\omega.t} - B.i.\omega.e^{-i.\omega.t}$
$a_y(t) = A'.i.\omega.e^{i.\omega.t} - B'.i.\omega.e^{-i.\omega.t}$

a. la technique générale de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre et du premier ordre est donnée en annexe

Afin de trouver les constantes A, B, A' et B', nous avons besoin des conditions initiales concernant la vitesse et l'accélération de la particule. En ce qui concerne la vitesse initiale, nous savons d'après les données de l'énoncé que $v_{x(t=0)} = 0$ et $v_{y(t=0)} = v_0$. Nous connaissons aussi l'expression de la force appliquée sur la particule à $t = 0$: $\vec{F}_{(t=0)} = q.\vec{v_0} \wedge \vec{B} = q.v_0.B.(\vec{e}_y \wedge -\vec{e}_z) = -q.v_0.B.\vec{e_x}$ soit $F_{x(t=0)} = -q.v_0.B$ et $F_{y(t=0)} = 0$. En utilisant la RFD, il est aisé de retrouver les conditions initiales sur l'accélération : $a_{x(t=0)} = -\frac{q.v_0.B}{m}$ et $a_{y(t=0)} = 0$

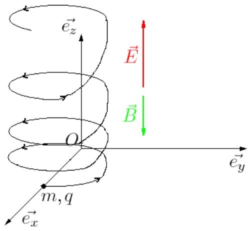
Il vient :

$$\begin{aligned}v_{x(t=0)} = 0 &\rightarrow A + B = 0\\ v_{y(t=0)} = v_0 &\rightarrow A' + B' = v_0\\ a_{x(t=0)} = -\frac{q.v_0.B}{m} &\rightarrow A - B = \frac{-q.v_0.B}{i.m.\omega}\\ a_{y(t=0)} = 0 &\rightarrow A' - B' = 0\end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}A &= -v_0/2.i\\ B &= v_0/2.i\\ A' &= v_0/2\\ B' &= v_0/2\end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}v_x &= -v_0.\sin(\omega.t)\\ v_y &= v_0.\cos(\omega.t)\\ a_x &= -v_0.\omega.\cos(\omega.t)\\ a_y &= -v_0.\omega.\sin(\omega.t)\end{aligned}$$

Par intégration, il vient $x(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega.t) + C$ et $y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega.t) + C'$.

Or à $t = 0$, $x_{(t=0)} = x_0$ et $y_{(t=0)} = 0$ soit : $C = x_0 - v_0/\omega$ et $C' = 0$.

$$x(t) = \frac{m.v_0}{q.B}\left(\cos(\frac{q.B}{m}.t) - 1\right) + x_0$$
$$y(t) = \frac{m.v_0}{q.B}\sin(\frac{q.B}{m}.t)$$
$$z_{(t)} = \frac{qE}{2m}.t^2$$



Dans le plan {Oxy}, le mouvement est circulaire uniforme, de vitesse angulaire $\omega = \frac{qB}{m}$, de rayon $R = \frac{m.v_0}{q.B}$ et de centre $X = x_0 - \frac{m.v_0}{q.B}$, $Y = 0$. Selon l'axe [Oz], il est uniformément accéléré !

3.8.8 Résolution du problème en utilisant les symétries et les outils de la mécanique

Attardons-nous quelques instants sur l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. La force induite par la présence du champ magnétique $\vec{F_\ell} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à la vitesse de la particule (propriété du produit vectoriel). Comme le vecteur vitesse est lui même toujours dirigé selon le vecteur "déplacement élémentaire" $\vec{d\ell}$, cela revient à dire que $\vec{F_\ell}$ est toujours perpendiculaire à la trajectoire. De ce fait, la force "magnétique" (ou force de Laplace) ne travaille pas (voir chapitre 6). Cette dernière n'est donc pas susceptible d'accélérer ou de ralentir la particule, elle ne peut que lui faire changer de direction tout en laissant le module de sa vitesse constante. Il en résulte que le module de la force de Lorentz est constant ($||\vec{B}|| = C^{te}$ et $||\vec{v}|| = v_0$, donc $||\vec{F_\ell}|| = q.v_0.B = C^{te}$). Le mouvement de la particule du à la composante "magnétique" uniquement de la force de Lorentz ne peut être que circulaire uniforme, car il est le seul à garantir les conditions $||\vec{F}|| = C^{te}$, $||\vec{v}|| = C^{te}$ et $\vec{F} \perp \vec{v}$. Dès lors, il semble logique d'utiliser le repère cylindrique, qui sera beaucoup plus adapté à aux symétries du mouvement !

Nous savons que, pour un mouvement circulaire, le moment de la force $\vec{\tau_F} = \vec{OM} \wedge \vec{F_\ell}$ est nul. Par conséquent, le mouvement cinétique $\vec{L}$ de la particule est un vecteur constant (car $\vec{L} = \frac{d}{dt}\vec{\tau}$). Pour connaître son expression, il suffit de le calculer à $t = 0$, soit $\vec{L} = m.x_0.\vec{e_\rho} \wedge v_0\vec{e_y} = m.x_0.v_0.\vec{e_z}$. Si le vecteur moment cinétique est constant et qu'il est dirigé selon l'axe $\vec{e_z}$, cela signifie que le mouvement de la particule (dû à F_ℓ uniquement !) est contenu dans le plan [Oxy). La force de Coulomb, c'est à dire la composante électrique de la force de Lorentz, est quand à elle dirigée selon $\vec{e_z}$. Les deux forces ne se "mélangent" pas et peuvent donc être traitées séparément. Nous connaissons déjà beaucoup de choses sur le mouvement de la particule, mais il nous reste à découvrir encore quelques grandeurs :

- Le mouvement de la particule induit par la force de Coulomb selon l'axe [Oz)
- La vitesse angulaire du mouvement circulaire uniforme dans le plan [Oxy)
- Le rayon de courbure R

On a :

$$\begin{aligned}
\vec{OM} &= \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z} \ avec\ \rho = R = C^{te} \\
\vec{v} &= R.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z} \ avec\ \frac{d\theta}{dt} = \omega = C^{te} \\
\vec{a} &= -R.\omega^2.\vec{e_\rho} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z} \\
\vec{F} &= q.\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = qE.\vec{e_z} + q.B.R.\omega.(\vec{e_\theta} \wedge -\vec{e}_z) = qE.\vec{e_z} - q.B.R.\omega.\vec{e_\rho}
\end{aligned}$$

En appliquant la RFD puis en la projetant sur les axes du repère choisi, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= m.\vec{a} \\
qE.\vec{e_z} - q.B.R.\omega.\vec{e_\rho} &= -m.R.\omega^2.\vec{e_\rho} + m.\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z}
\end{aligned}$$

(1)Projection sur $\vec{e_z}$: $qE = m.\frac{d^2z}{dt^2}$

(2)Projection sur $\vec{e_\rho}$: $-q.B.R.\omega = -m.R.\omega^2$

Cette fois-ci, les équations différentielles du système sont **découplées** et leur résolution est immédiate :

L'équation (1) conduit à : $z_{(t)} = \frac{qE}{m}t^2 + C_1.t + C_2$

L'équation (2) conduit à : $\omega = \frac{qB}{m}$ (R est obtenu à partir des conditions initiales :$v_0 = R.\omega\ soit\ R = \frac{m.v_0}{q.B}$)

Nous retrouvons bien les mêmes résultats que nous avions obtenu en traitant le problème dans le repère cartésien, cependant les calculs sont beaucoup moins complexes en exploitant dès le début les données du problème et en choisissant le "bon" repère.

Chapitre 4

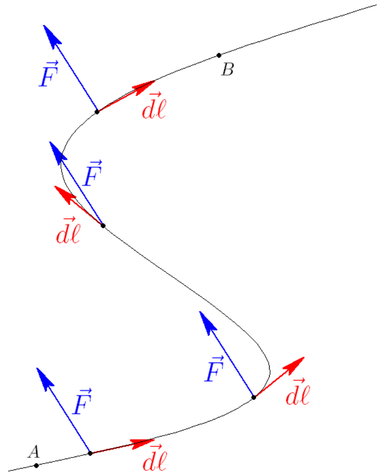
Travail et Énergie

4.1 Travail d'une force

4.1.1 Définition

Considérons un point matériel M repéré dans un référentiel donné $\Re$ par le vecteur position $\vec{OM}$ et soumis à une force $\vec{F}$. Pendant un temps infinitésimal dt, le point M se déplace selon le vecteur $\vec{d\ell}$. Par définition, le travail élémentaire dW de la force $\vec{F}$ sur le point matériel pendant le temps dt est donné par :

$$\boxed{dW = \vec{F}.\vec{d\ell}}$$



Par ailleurs, comme $\vec{d\ell} = \vec{v}.dt$ (où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse), on a aussi : $dW = \vec{F}.\vec{v}.dt$. Pour obtenir le travail d'une force sur un trajet fini $\widehat{AB}$, il suffit d'intégrer l'expression ci-dessus par rapport à au déplacement élémentaire $d\ell = ||\vec{d\ell}||$, ou par rapport au temps dt.

$$\boxed{W_{\widehat{AB}} = \int_A^B \vec{F}.\vec{d\ell} = \int_A^B ||\vec{F}||.\cos\left(\vec{F},\vec{d\ell}\right).d\ell} \quad \text{ou} \quad \boxed{W_{\widehat{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}.\vec{v}.dt = \int_{t_A}^{t_B} ||\vec{F}||.||\vec{v}||.\cos\left(\vec{F},\vec{v}\right).dt}$$

L'unité d'un travail est le Joule (J). Sa dimension est $[M].[L]^2.[T]^{-2}$. On note que la quantité $\frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$ est homogène à une puissance.

4.1.2 Signification physique

Le travail d'une force correspond au produit scalaire de cette dernière par le vecteur "déplacement" du système considéré. Ainsi, tout se passe comme si **seule** la composante de la force **parallèle** à la trajectoire ou à la vitesse du système était prise en compte dans le calcul du travail. Reprenons l'expression de la relation fondamentale de la dynamique pour un objet soumis à plusieurs forces $\vec{F^i}$, et développons-là selon les vecteurs de base du repère cartésien :

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F^i} &= m.\vec{a} \\ \sum_i F_x^i.\vec{e_x} + \sum_j F_y^j.\vec{e_y} + \sum_k F_z^k.\vec{e_z} &= m.\left(a_x.\vec{e_x} + a_y.\vec{e_y} + a_z.\vec{e_z}\right)\end{aligned}$$

Nous faisons l'hypothèse que l'objet est contraint de se déplacer uniquement selon l'axe [Ox). Consécutivement, $a_y = a_z = 0$ et la relation vectorielle ci-dessus n'est satisfaite que si $\sum_j F_y^j = \sum_k F_z^k = 0$... Il devient évident que **seules** les composantes selon l'axe [Ox) des forces considérées sont susceptibles de modifier le module de vitesse de l'objet ($a_x \neq 0$). Cette idée est est reprise dans la notion de travail :

- Si le travail d'une force sur un point matériel est positif, la norme de sa vitesse sera augmentée.
- Si le travail d'une force sur un point matériel est négatif, la norme de sa vitesse sera réduite.
- Si le travail d'une force sur un point matériel est nul, la norme de sa vitesse reste constante.

ATTENTION : nous parlons ici de la norme de la vitesse... et non pas du vecteur vitesse !

Lorsqu'une force est toujours perpendiculaire au déplacement d'un point matériel, cette dernière ne travaille pas $\left(W = 0 \text{ car } \cos\left(\vec{F}, \vec{d\ell}\right) = 0\right)$ et ainsi le module du point matériel soumis à ce type de force reste constant. Cependant, puisqu'une force est appliquée perpendiculairement à la trajectoire du mobile, il en résulte que l'objet est tout de même soumis à une accélération normale à son déplacement... Mais cette accélération **modifie uniquement la trajectoire** de l'objet, **la norme de sa vitesse ne change pas !**

Nous connaissons déjà deux exemples de force dont le travail est toujours nul : la force de réaction normale[1] $\vec{N}$ et la composante "magnétique" de la force de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. Ces forces ont pour seul effet de "courber" les trajectoires, sans changer la norme de la vitesse.

Au contraire, les forces de frottement sont toujours dirigées selon la direction opposée du vecteur vitesse : leur travail est donc toujours négatif et leur action consiste, évidement, à ralentir les objets !

4.2 Théorème de l'énergie cinétique

Pour établir l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique, nous utilisons l'expression $dW = \vec{F}.\vec{v}.dt$... et nous choisissons d'exprimer la force $\vec{F}$ dans la base de Frenet : $\vec{F} = F_T.\vec{e_T} + F_N.\vec{e_N} = m.a_T.\vec{e_T} + m.a_N.\vec{e_N} = m\frac{d||\vec{v}||}{dt}.\vec{e_T} + m.\frac{||\vec{v}||^2}{R}.\vec{e_N}$. Par ailleurs, nous nous rappelons que, dans la base de Frenet, $\vec{v} = ||\vec{v}||.\vec{e_T}$.

$$\begin{aligned}
dW &= \vec{F}.\vec{v}.dt \\
\int dW &= \int \vec{F}.\vec{v}.dt \\
\int dW &= \int \left(m\frac{d||\vec{v}||}{dt}.\vec{e_T} + m.\frac{||\vec{v}||^2}{R}.\vec{e_N}\right).||\vec{v}||.\vec{e_T}.dt \\
\int dW &= \int m.\frac{d||\vec{v}||}{dt}.||\vec{v}||.dt \\
\int dW &= \int m.||\vec{v}||.d||\vec{v}|| \\
W &= \frac{1}{2}m.||\vec{v}||^2 + C^{te} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + C^{te}
\end{aligned}$$

On appelle, par définition, **énergie cinétique** du point matériel la quantité $E_c = \frac{1}{2}m.v^2$. L'énergie cinétique n'est définie qu'à une constante près et ne possède aucun sens physique : seule les variations d'énergie cinétique sont susceptibles de caractériser le changement d'état cinétique d'un point matériel. En intégrant avec des bornes d'intégration t_A et t_B correspondant aux temps pour lesquels le point était en A et B respectivement, on obtient :

$$\boxed{W_{\widehat{AB}} = E_c^B - E_c^A = \frac{1}{2}.m.\left(v_B^2 - v_A^2\right)}$$

Le travail d'une force qui s'exerce sur un point matériel entre deux instants est égal à la variation de l'énergie cinétique du point entre ces deux mêmes instants.

Le théorème de l'énergie cinétique reste encore valable dans un référentiel non-galiléen, à condition de tenir compte du travail de la force d'entrainement (le travail de la force de Coriolis est nul, puisque cette force est toujours perpendiculaire au mouvement relatif).

4.3 Énergie potentielle et forces conservatives

4.3.1 Un nouvel outil mathématique : le gradient

Le gradient est un opérateur mathématique **vectoriel**, noté $\vec{grad}$ ou $\vec{\nabla}$, définit de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{grad} &= \frac{\partial}{\partial x}.\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{e_z} \quad \text{(en coordonnées cartésiennes)} \\
\vec{grad} &= \frac{\partial}{\partial \rho}.\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}.\vec{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{e_z} \quad \text{(en coordonnées cylindriques)} \\
\vec{grad} &= \frac{\partial}{\partial r}.\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.\vec{e_\theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}.\vec{e_\phi} \quad \text{(en coordonnées sphériques)}
\end{aligned}}$$

1. ATTENTION, cette affirmation n'est vraie que dans le cas de la mécanique du point. Elle cesse d'être valable, dans certains cas, lorsque l'on considère des solides déformables et en particulier lorsque l'on s'intéresse à la notion de choc !

Il accepte en argument une fonction **scalaire** des coordonnées $\{x,y,z\}$ ou $\{\rho,\theta,z\}$ ou $\{r,\theta,\phi\}$.

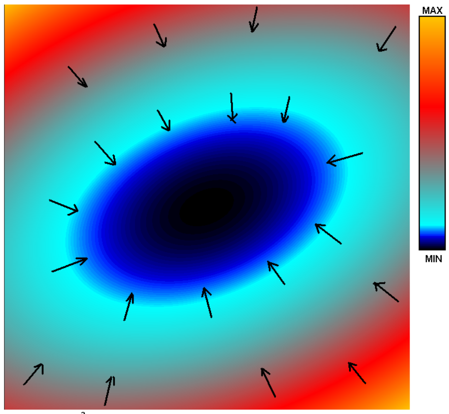
Quelques exemples :

$$\begin{aligned}
\text{Soit } f(x,y,z) &= x^2+\sin(5.y)-3.z \text{ , on a : } \vec{grad}\left[f(x,y,z)\right] = 2.x.\vec{e_x} + 5.\cos(5.y).\vec{e_y} - 3.\vec{e_z} \\
\text{Soit } f(\rho,\theta,z) &= 6.\rho^2+\cos(\theta)-e^z \text{ , on a : } \vec{grad}\left[f(\rho,\theta,z)\right] = 12.\rho.\vec{e_\rho} - \frac{\sin(\theta)}{\rho}.\vec{e_\theta} - e^z.\vec{e_z} \\
\text{Soit } f(r,\theta,\phi) &= \ln(r)-5.\theta\times\phi \text{ , on a : } \vec{grad}\left[f(r,\theta,\phi)\right] = \frac{1}{r}.\vec{e_r} - \frac{5.\phi}{r}.\vec{e_\theta} - \frac{5\theta}{r.\sin\theta}.\vec{e_\phi}
\end{aligned}$$

Une autre définition du gradient consiste à utiliser la relation :

$$\boxed{df = \vec{grad}\,(f)\,.\vec{d\ell}}$$

Notez que l'expression du vecteur "déplacement élémentaire" $\vec{d\ell}$ change en fonction du repère dans lequel il est exprimé, ce qui explique l'origine des trois formes différentes du vecteur gradient selon le repère. Intuitivement, le gradient correspond à "une dérivée à plusieurs dimensions". En effet, la composante selon l'axe [Ox) du vecteur gradient correspond à la dérivée partielle de la fonction $f(x,y,z)$ selon la coordonnée x ; la composante selon l'axe [Oy) du vecteur gradient correspond à la dérivée partielle de la fonction $f(x,y,z)$ selon la coordonnée y et la composante selon l'axe [Oz) du vecteur gradient correspond à la dérivée partielle de la fonction $f(x,y,z)$ selon la coordonnée z.



Fonction f(x,y)=x²+ 2 y.(y - 1/2.x) représentée à l'aide d'une "carte de couleur". Le vecteur gradient a été représenté en quelques points (x,y)

4.3.2 Potentiel et énergie potentielle

Un potentiel est une fonction scalaire U des différentes coordonnées de l'espace à partir de laquelle il est possible d'en déduire un champ de force $\vec{F}$ par la relation $\vec{F} = -\vec{grad}(U)$. Réciproquement, une force $\vec{F}$ dérive d'un **potentiel** lorsqu'il existe une fonction U telle que $\vec{F} = -\vec{grad}(U)$.

ATTENTION, toutes les forces ne dérivent pas forcément d'un potentiel ! Pour cela, il faut que la forme différentielle de $\vec{F}.\vec{d\ell} = F_x.dx+F_y.dy+F_z.dz$ soit une différentielle totale. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi s'écrivent :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad \textit{en coordonnées cartesiennes}$$

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial(\rho.F_\theta)}{\partial \rho} \quad , \quad \rho.\frac{\partial(F_\theta)}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = \frac{\partial F_\rho}{\partial z} \quad \textit{en coordonnées cylindriques}$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial(r.F_\theta)}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial(F_\theta)}{\partial \varphi} = \frac{\partial(\sin\theta.F_\varphi)}{\partial \theta} \quad , \quad \sin\theta.\frac{\partial(r.F_\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \quad \textit{en coordonnées sphériques}$$

REMARQUE, cela revient aussi à écrire $\vec{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ puisque $\vec{rot}\left(\vec{grad}(U)\right) = \vec{0}$!!!

Exemples

Soit $\vec{F}_{(x,y,z)} = \underbrace{(y+2.z+e^x)}_{F_x}.\vec{e_x} + \underbrace{x}_{F_y}.\vec{e_y} + \underbrace{2.x}_{F_z}.\vec{e_z}$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial y} &= 1 \text{ et } \frac{\partial F_y}{\partial x} = 1 \implies \text{O.K.} \\
\frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0 \text{ et } \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \implies \text{O.K.} \\
\frac{\partial F_z}{\partial x} &= 2 \text{ et } \frac{\partial F_x}{\partial z} = 2 \implies \text{O.K.}
\end{aligned}$$

Cette force dérive d'un potentiel : $\vec{F} = -\vec{grad}(U)$ avec :

$$U_{(x,y,z)} = -x.\,(y+2.z) - e^x$$

Soit $\vec{F}_{(r,\theta,\phi)} = \underbrace{(3.r)}_{F_r}.\vec{e_r} + \underbrace{r.\sin\theta}_{F_\theta}.\vec{e_\theta} + \underbrace{\cos\phi}_{F_\phi}.\vec{e_\phi}$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_r}{\partial \theta} &= 0 \text{ et } \frac{\partial(r.F_\theta)}{\partial r} = 2.r.\sin\theta \implies \times \\
\frac{\partial(r.F_\theta)}{\partial \phi} &= 0 \text{ et } \frac{\partial(r.\sin\theta.F_\phi)}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi \implies \times \\
\frac{\partial(r.\sin\theta.F_\phi)}{\partial r} &= \sin\theta\cos\phi \text{ et } \frac{\partial F_r}{\partial \phi} = 0 \implies \times
\end{aligned}$$

Cette force ne dérive pas d'un potentiel !

La fonction U tel que $\vec{F} = -\vec{grad}(U)$ n'existe pas !

4.3.3 Les forces conservatives

Définition

Une force qui dérive d'un potentiel est dite "conservative". Calculons, pour une force conservative $\vec{F} = F_x(x,y,z).\vec{e_x} + F_y(x,y,z).\vec{e_y} + F_z(x,y,z).\vec{e_z}$, le travail de celle-ci sur un point mobile dont la position passe d'un point M_A de coordonnées $\{x_A, y_A, z_A\}$ à un point M_B de coordonnées $\{x_B, y_B, z_B\}$

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{M_A}^{M_B} \vec{F}.\vec{d\ell} = \int_{M_A}^{M_B} -\vec{grad}\left[U_{(x,y,z)}\right].\vec{d\ell} = \int_{M_A}^{M_B} -dU_{(x,y,z)} = U_{(x_A,y_A,z_A)} - U_{(x_B,y_B,z_B)}$$

Le travail d'une force conservative sur un trajet donné est égal à la diminution de l'énergie potentielle. Si le trajet $\widehat{M_A M_B}$ est fermé (bouclé), le travail d'une force conservative est nul !

Exemples de forces conservatives

La force de gravitation La force de gravitation s'écrit $\vec{F_G} = -G\frac{m_1.m_2}{r^2}.\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. Après s'être assuré que cette force dérive bien d'un potentiel en effectuant les vérifications nécessaires, nous cherchons son énergie potentielle E_p telle que :

$$\begin{aligned}
\vec{F_G} &= -\vec{grad}\,(E_p) \\
-G\frac{m_1.m_2}{r^2}.\vec{e_r} &= -\frac{\partial E_p}{\partial r}.\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}.\vec{e_\theta} - \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \phi}.\vec{e_\phi} \\
G\frac{m_1.m_2}{r^2} &= \frac{\partial E_p}{\partial r} \quad \text{après projection sur } \vec{e_r} \\
E_p &= \frac{-G.m_1.m_2}{r} + C^{te}
\end{aligned}$$

La force de pesanteur La force de pesanteur est l'équivalent de la force de gravitation lorsque les objets considérés sont proches de la surface de la terre. On a $\vec{P} = m.\vec{g}$ avec $\vec{g} = -G\frac{M_{terre}}{R^2_{terre}}.\vec{e_z}$. Nous cherchons son énergie potentielle E_p telle que :

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= -\vec{grad}\,(E_p) \\
-m.g.\vec{e_z} &= -\frac{\partial E_p}{\partial x}.\vec{e_x} - \frac{\partial E_p}{\partial y}.\vec{e_y} - \frac{\partial E_p}{\partial z}.\vec{e_z} \\
-m.g &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad \text{après projection sur } \vec{e_z} \\
E_p &= m.g.z + C^{te}
\end{aligned}$$

La force de rappel d'un ressort La force de rappel d'un ressort s'écrit, en coordonnées cartésiennes et en considérant un système astreint à se déplacer selon l'axe [Ox) uniquement : $\vec{F} = -k.x.\vec{e_x}$ De la même manière que précédemment, nous cherchons son énergie potentielle U telle que :

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\vec{grad}\,(U) \\
-k.x.\vec{e_x} &= -\frac{\partial U}{\partial x}.\vec{e_x} - \frac{\partial U}{\partial y}.\vec{e_y} + \frac{\partial U}{\partial z}.\vec{e_z} \\
k.x &= \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{après projection sur } \vec{e_x} \\
U(x) &= \frac{1}{2}k.x^2 + C^{te}
\end{aligned}$$

La force électrostatique La force électrostatique entre deux charges ponctuelles s'écrit $\vec{F} = k\frac{q_1.q_2}{r^2}.\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. Elle possède la même forme (au signe près) que la force de gravitation. Son énergie potentielle associée est donc :

$$U(r) = \frac{k.q_1.q_2}{r} + C^{te}$$

4.4 Énergie mécanique

Considérons un point matériel soumis à l'action d'une (ou de plusieurs) force conservative notée $\vec{F}$. Nous avons vu que, dans ce cas, le travail de la force sur un trajet allant d'un point A à un point B est égale à la variation de l'énergie potentielle associée à cette force : $W_{\widehat{AB}} = U_A - U_B$. Or le travail d'une force est aussi égale à la variation de l'énergie cinétique : $W_{\widehat{AB}} = E_c^B - E_c^A$. Il vient :

$$\begin{aligned}
W_{\widehat{AB}} = U_A - U_B &= E_c^B - E_c^A \\
E_c^A + U_A &= E_c^B + U_B
\end{aligned}$$

On définit **l'énergie mécanique** comme étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_M = E_c + U}$$

Si un point matériel n'est soumis qu'à l'action de forces conservatives, l'énergie mécanique de cette dernière est conservée au cours du temps : $E_M^A = E_M^B$

4.5 Puits et barrières de potentiel

Nous allons expliquer ce que représentent les puits et les barrières de potentiel à travers la résolution de deux problèmes *a priori* différents.

Problème 1

Considérons un point matériel de masse m, susceptible de se déplacer uniquement selon l'axe [Ox] et attaché à une ressort de constante de raideur k. Nous supposons que le ressort est à l'équilibre lorsque $x = 0$. La force de rappel du ressort s'écrit $\vec{F} = -k.x.\vec{e_x}$ et son potentiel associé est $U_{(x)} = 1/2.k.x^2$. Nous rappelons que l'expression de la force de rappel du ressort n'est valable que pour de très petits déplacements autour de $x = 0$. Le poids du point matériel $\vec{P} = -m.g.\vec{e_z}$ est compensé par la réaction du support $\vec{N} = +m.g.\vec{e_z}$. Ces deux dernières forces sont toujours perpendiculaires au mouvement et ne travaillent pas. Le déplacement du point matériel est supposé sans frottement.

Plutôt que de résoudre l'équation du mouvement à partir de la RFD, nous allons utiliser, dans ce cas, la conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}
E_M = E_c + U &= C^{te} \\
\frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2 &= C^{te} \\
\frac{1}{2}m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k.x^2 &= C^{te} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k.x^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(C^{te}\right) \\
m.\dot{x}.\ddot{x} + k.\dot{x}.x &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation différentielle dont la solution est $x_{(t)} = A.\sin(\omega.t + \phi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, et où A et ϕ sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales ci-après. Supposons que, à $t = 0$, le point matériel soit en $x = 0$ avec une vitesse initiale v_0. La position et la vitesse du point matériel sont désormais totalement déterminées par les relations ci-dessous :

$$x_{(t)} = \frac{v_0}{\omega}.\sin(\omega.t) \qquad v_{(t)} = v_0.\cos(\omega.t)$$

Problème 2

Considérons le mouvement d'un point matériel, soumis à un champ de gravité $\vec{g} = -g.\vec{e_y}$ et de masse m telle que $m.g = 1$. Le système est astreint à se déplacer sur un support dont le profil est donné par l'équation $y_{(x)} = 1/2.k.x^2$. La force de réaction du support sur le système ne travaille pas, seul le poids $\vec{P} = -m.g.\vec{e_y} = -\vec{e_y}$ est susceptible de fournir un travail non-nul.
Plutôt que de résoudre l'équation du mouvement à partir de la RFD, nous allons utiliser, dans ce cas, le théorème de l'énergie cinétique. Nous avons besoin, dans un premier temps, de déterminer le vecteur "déplacement élémentaire" le long du profil $y_{(x)}$:

$$\vec{d\ell} = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} = dx.\vec{e_x} + k.x.dx.\vec{e_y}$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, il vient :

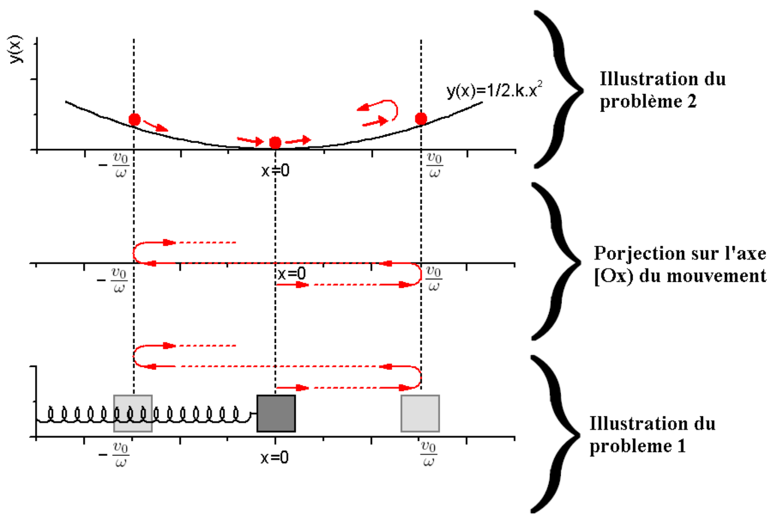
$$\begin{aligned}
dE_c &= dW \\
d\left(\frac{1}{2}.m.(\dot{x}^2 + \underbrace{\dot{y}^2}_{\approx 0})\right) &= \vec{P}.\vec{d\ell} + \underbrace{\vec{N}.\vec{d\ell}}_{=0}
\end{aligned}$$

La quantité $\vec{N}.\vec{d\ell}$ est nulle puisque la réaction du support ne travaille pas ($\vec{N} \perp \vec{d\ell}$). Par ailleurs, on ne considère que de très petits déplacements autour de $x = 0$, ainsi il est possible de négliger le terme en $\dot{y}^2$

$$\begin{aligned}
m.\dot{x}.d(\dot{x}) &= -\vec{e_y}.(dx.\vec{e_x} + k.x.dx.\vec{e_y}) \\
m.\dot{x}.\ddot{x}.dt &= -k.x.dx \\
m.\ddot{x} + k.x &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{k}{m}.x &= 0
\end{aligned}$$

Nous obtenons la même équation différentielle que précédemment et, dans le cas où nous utilisons les mêmes conditions intiales, nous obtenons les mêmes équations du mouvement.

$$x_{(t)} = \frac{v_0}{\omega}.\sin(\omega.t) \qquad v_{(t)} = v_0.\cos(\omega.t)$$



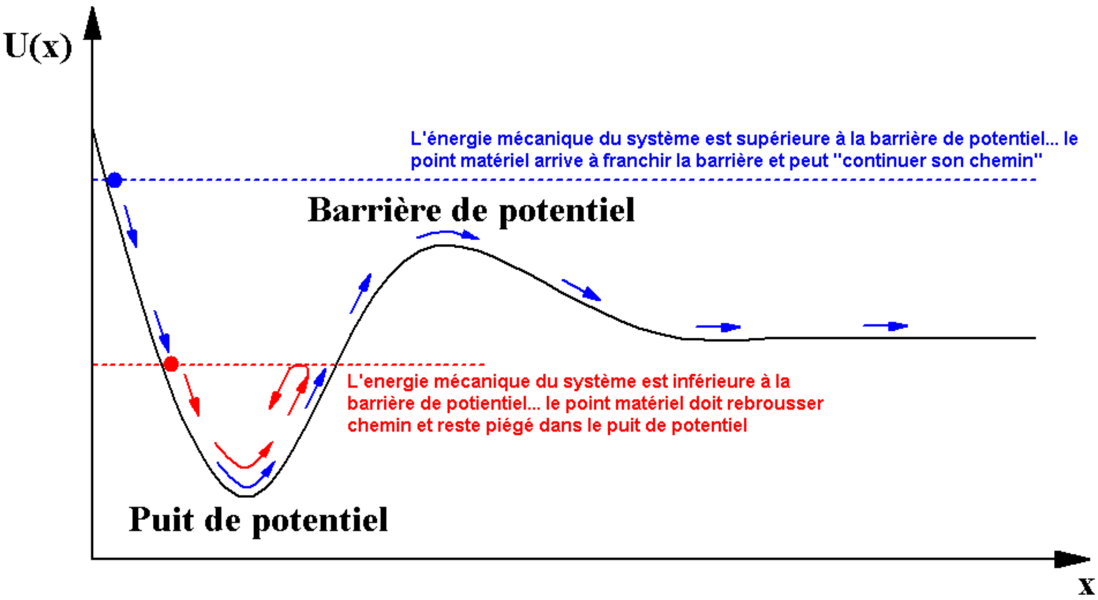
REMARQUE : si on traite correctement le problème 2, c'est à dire sans négliger le terme $\dot{y}^2$ dans l'expression de l'énergie cinétique, on s'aperçoit que la projection du mouvement selon l'axe [Ox] n'est pas rigoureusement sinuzoïdale. Il n'y a que dans le cas où $y \approx 0$, c'est à dire lorsque l'on se restreint à des déplacements très proches de $x = 0$, que cette approximation devient valide. Dans le cas général, une particule évoluant dans un potentiel $U_{(x,y)}$ n'est pas rigoureusement équivalent à une bille soumise à l'action de la pesanteur et se deplaçant sans frottement selon une "ligne" donnée par l'équation $U_{(x,y)}$... cependant, cette analogie grossière permet de comprendre intuitivement ce que sont des barrières et des puits de portentiels

Ainsi, lorsqu'un point matériel est soumis à l'action de forces conservatives, il est possible **d'anticiper simplement** son mouvement en calculant dans un premier temps le potentiel lié aux forces conservatives considérées, et d'imaginer **grossièrement** ce même point matériel comme une petite bille se déplaçant le long de la ligne de potentiel sous l'effet d'une force de gravitation valant l'unité.

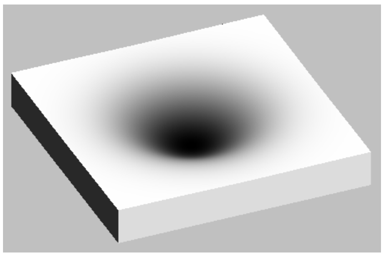
- Des "creux" dans le profil de la ligne de potentiel sont équivalents à "des puits de potentiel" : les minima locaux de $U(x)$ représentent des points d'équilibre stables. Ils sont définis par $\frac{dU}{dx} = 0$ (condition d'équilibre) et $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ (condition de stabilité).

- Des "bosses" dans le profil de la ligne de potentiel sont équivalentes à "des barrières de potentiel" : les maxima locaux de $U_{(x)}$ représentent des points d'équilibre instables. Ils sont définis par $\frac{dU}{dx} = 0$ (condition d'équilibre) et $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ (condition d'instabilité).

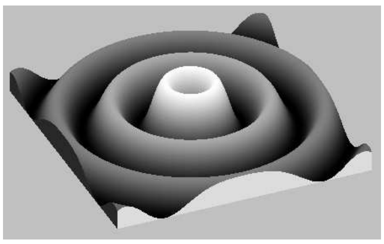
- Si l'énergie mécanique du système considéré est plus grande que les éventuelles barrières de potentiel, le point matériel pourra les franchir (passer au delà des barrières de potentiel). Sinon, le point matériel devra rebrousser chemin !



A une dimension, le tracé du profil de potentiel nécessite deux dimensions et est représenté par une fonction $U_{(x)}$. A deux dimensions, le tracé du profil de potentiel nécessite trois dimensions et est représenté par une fonction $U_{(x,y)}$. A trois dimension, le tracé du profil de potentiel nécessite quatre dimensions et ne peut être représenté simplement !



Exemple d'un puit de potentiel 2D



Barrières et puits de potentiel 2D

Annexes

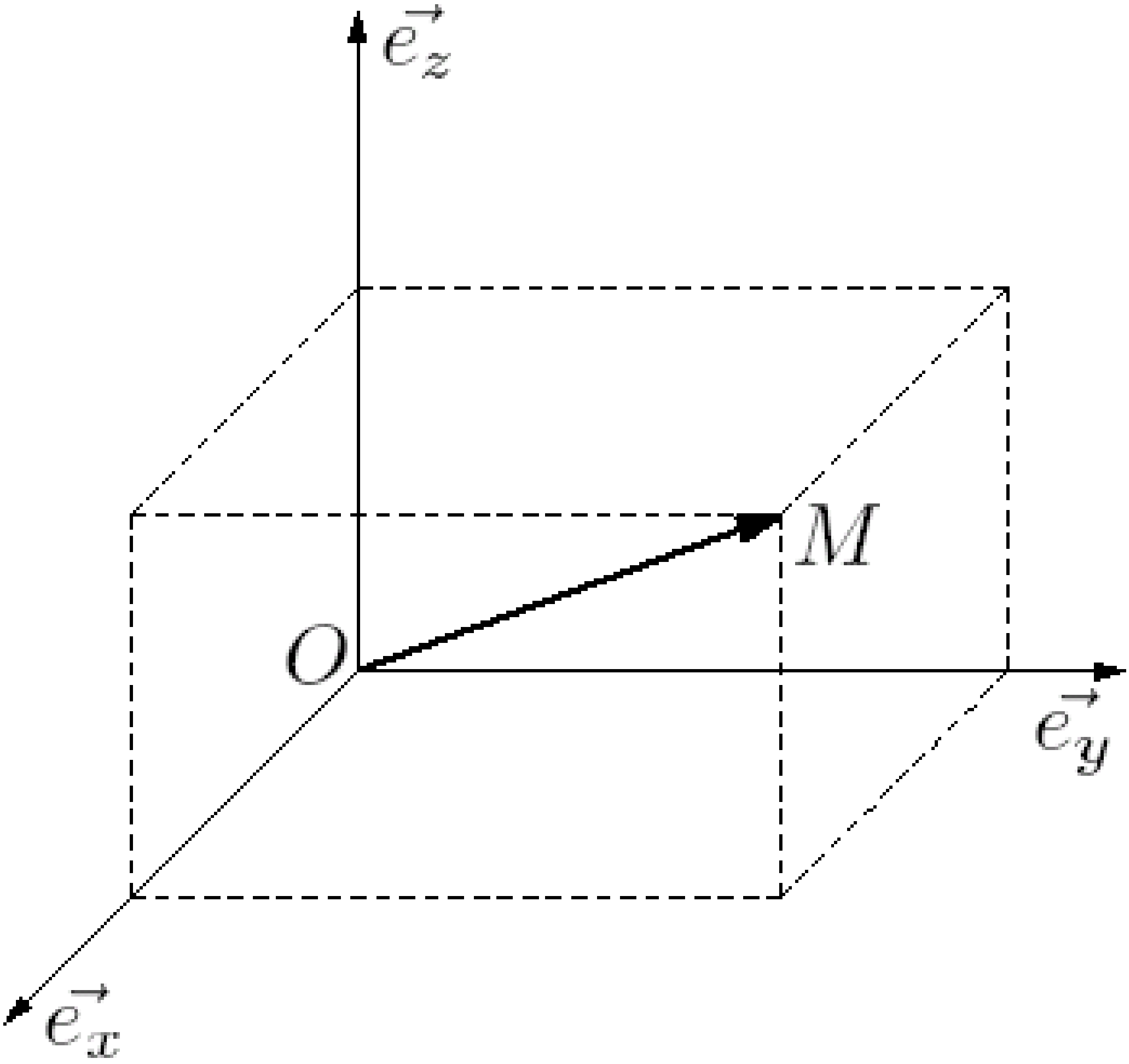
Cinématique et repères

Repere cartesien

Repere cylindrique

Repere spherique

Voir au dos



Expression du vecteur position

$$\vec{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

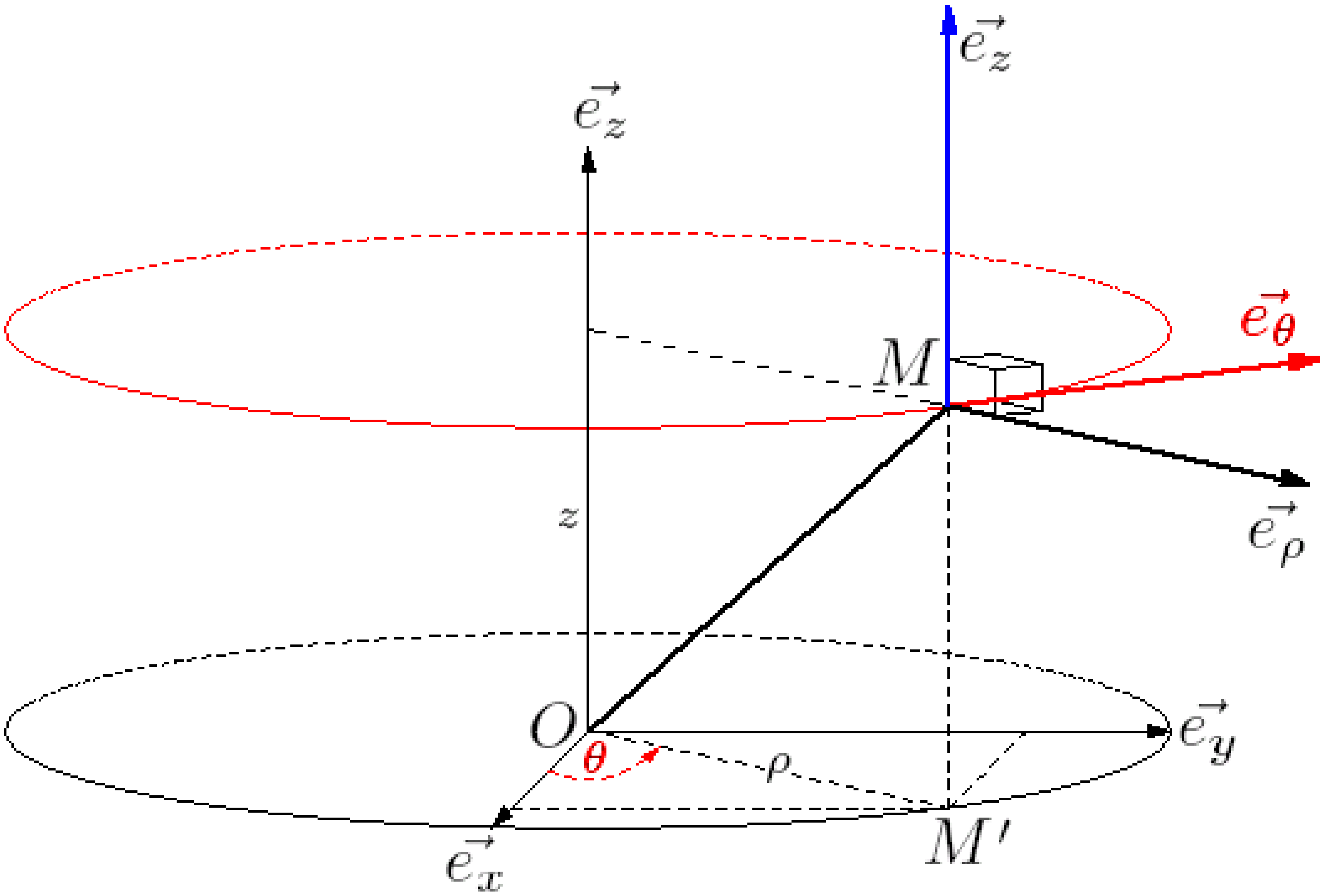
$$\vec{d\ell} = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}.\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}$$



Expression du vecteur position

$$\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

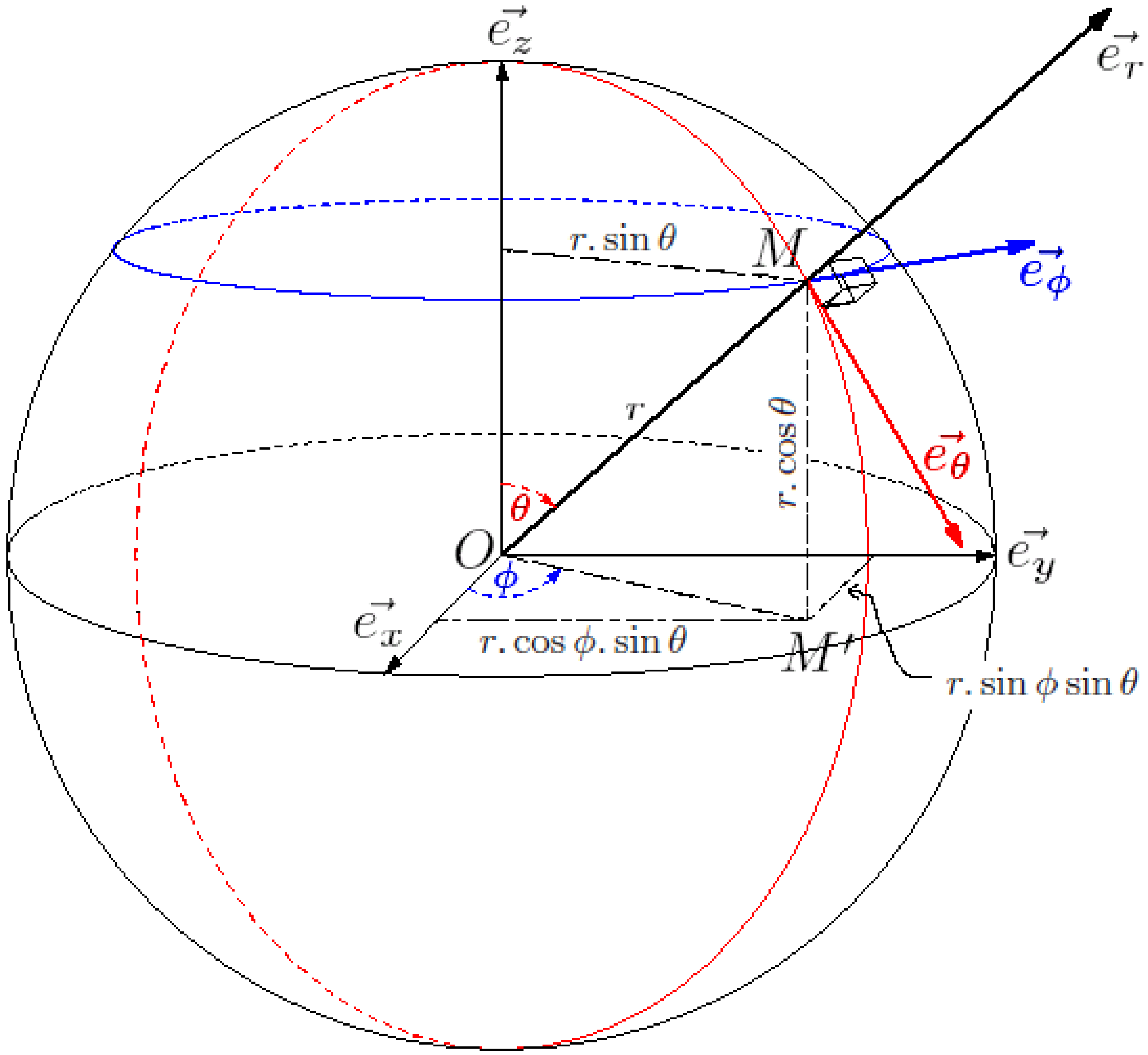
$$\vec{d\ell} = d\rho.\vec{e_\rho} + \rho.d\theta.\vec{e_\theta} + dz.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z}$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right).\vec{e_\theta} + \ddot{z}.\vec{e_z}$$



Expression du vecteur position

$$\vec{OM} = r.\vec{e_r}$$

Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

$$\vec{d\ell} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.d\phi.\vec{e_\phi}$$

Expression du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}.\vec{e_r} + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\frac{d\phi}{dt}.\vec{e_\phi}$$

Expression du vecteur accélération

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right).\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e_\theta} + \left(2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta\right).\vec{e_\phi}$$

Méthode de résolution des équation différentielles linéaires

Les équations différentielles linéaires sont très souvent rencontrées en mécanique classique. Leur traitement mathématique ne comporte pas de difficultés majeures, encore faut-il avoir compris en profondeur les techniques de résolution pour pouvoir les intégrer correctement. Le équations différentielles linéaires ont déjà été traitées dans votre cours de mathématique au premier semestre, elles sont cependant re-discutée dans cette annexe, de manière moins formelle et plus appliqué à la mécanique du point.

Soit $x_{(t)}$ une coordonnée du mouvement dont nous aimerions connaitre l'évolution au cours du temps. Après avoir appliqué la relation fondamentale de la dynamique, nous obtenons une équation différentielle linéaire du premier ordre ou du second ordre :

<u>1^{er} ordre</u>

$$\alpha.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \beta.x_{(t)} = \epsilon_{(t)}$$

<u>2^{nd} ordre</u>

$$\alpha.\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} + \beta.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \gamma.x_{(t)} = \epsilon_{(t)}$$

La solution générale de ces équations est donnée par la solution de l'équation "sans second membre" (ESSM - c'est à dire les mêmes équations que ci-dessus, mais avec $\epsilon = 0$) <u>**plus**</u> une solution particulière de l'équation "avec second membre" (EASM)

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Resolution de l'ESSM

$$\alpha.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \beta.x_{(t)} = 0$$

$$\frac{dx_{(t)}}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha}.x_{(t)}$$

$$\frac{dx_{(t)}}{x_{(t)}} = -\frac{\beta}{\alpha}.dt$$

$$\int \frac{dx_{(t)}}{x_{(t)}} = -\int \frac{\beta}{\alpha}.dt$$

$$\ln\left(x_{(t)}\right) + C^{te} = -\frac{\beta}{\alpha}.t + C^{te}$$

$$x_{(t)} = e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t + C^{te}} = A.e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t}$$

$$\boxed{x_{(t)} = A.e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t} \text{ avec A une constante}}$$

Résolution de l'EASM

Il s'agit ici de trouver une solution particulière de l'EASM. Si le terme $\epsilon_{(t)}$ se présente sous la forme $\epsilon_{(t)} = \sum\limits_n C_n^{te}.t^n$, il est très aisé de déterminer une solution particulière de l'EASM, comme le montre les exemples suivants :

Par exemple, si $\epsilon_{(t)} = C$ est une constante, on remarque que l'équation $x_{(t)} = \frac{C}{\beta}$ est une solution particulière possible de l'EASM.

Si $\epsilon_{(t)} = C_1.t + C_2$, alors l'équation $x_{(t)} = \frac{C_1}{\beta}.t + \frac{C_2-(\alpha.C_1)/(\beta)}{\beta}$ est une solution particulière possible de l'EASM.

Si $\epsilon_{(t)}$ est une fonction autre que polynomiale, alors il faut rechercher une solution particulière de manière empirique. Par exemple si $\epsilon_{(t)} = \ln(k.t)$ ou $\epsilon_{(t)} = \cos(k.t)$, il est très difficile de trouver une solution particulière analytique et simple de l'EASM

Ainsi, si l'expression de l'équation à résoudre est $\alpha.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \beta.x_{(t)} = C_1.t + C_2$, la solution sera de la forme :

$$\boxed{x_{(t)} = A.e^{-\frac{\beta}{\alpha}.t} + \frac{C_1}{\beta}.t + \frac{C_2-(\alpha.C_1)/(\beta)}{\beta}}$$

La constante A est encore inconnue. Elle sera déterminée par les conditions initiales du problème. Rappelons que cette constante est issue de l'intégration de l'ESSM. Puisque cette dernière est du premier ordre, une seule intégration est nécessaire et de ce fait, une seule constante devra être déterminée avec une seul condition initiale.

Équation différentielle linéaire du second ordre

La méthode de résolution des équations différentielles du second ordre est très similaire à celle utilisée pour les équations différentielles du premier ordre. Il s'agit dans un premier temps de rechercher toutes les solutions possibles de l'ESSM, puis de rechercher une solution particulière de l'EASM. Enfin la solution finale est donnée par la somme de l'ESSM et de l'EASM. Seules la technique de résolution de l'ESSM et la détermination de deux constantes d'intégration grâce aux conditions initiales sont différentes du cas traite précédemment.

Résolution de l'ESSM

L'ESSM s'écrit $\alpha.\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} + \beta.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \gamma.x_{(t)} = 0$. Pour la résoudre, nous cherchons des solutions du type : $x_{(t)} = A.e^{\omega.t}$, que nous remplaçons dans l'ESSM. Il vient :

$$\begin{aligned}
&\alpha.\frac{d^2}{dt^2}\left(A.e^{\omega.t}\right) + \beta.\frac{d}{dt}\left(A.e^{\omega.t}\right) + \gamma.A.e^{\omega.t} = 0\\
&\alpha.\omega^2.A.e^{\omega.t} + \beta.\omega.A.e^{\omega.t} + \gamma.A.e^{\omega.t} = 0\\
&A.e^{\omega.t} \times \left(\alpha.\omega^2. + \beta.\omega. + \gamma\right) = 0\\
&\alpha.\omega^2. + \beta.\omega. + \gamma = 0
\end{aligned}$$

Cette derniere relation ($\alpha.\omega^2. + \beta.\omega. + \gamma = 0$) est aussi appelée le "polynôme caractéristique" de l'équation différentielle. Nous cherchons le(s) solution(s) ω qui satisfont cette équation. Selon le signe de $\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma$, deux cas sont possibles :

Cas 1 : $\Delta \geq 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma \geq 0$$

$$\text{soit } \omega^a_{(t)} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2.\alpha} \quad \text{et} \quad \omega^b_{(t)} = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2.\alpha}$$

La solution globale de l'ESSM est une combinaison linéaire des deux solutions possibles $x^a_{(t)} = C_1 e^{\omega^a.t}$ et $x^b_{(t)} = C_2 e^{\omega^b.t}$:

$$\begin{aligned}
x_{(t)} &= C_1.e^{\omega^a.t} + C_2.e^{\omega^b.t}\\
x_{(t)} &= e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(C_1.e^{\frac{+\sqrt{\Delta}.t}{2\alpha}} + C_2.e^{\frac{-\sqrt{\Delta}.t}{2\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Cas 2 : $\Delta < 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma < 0$$

$$\text{soit } \omega^a_{(t)} = \frac{-\beta + i.\sqrt{-\Delta}}{2.\alpha} \quad \text{et} \quad \omega^b_{(t)} = \frac{-\beta - i.\sqrt{-\Delta}}{2.\alpha}$$

La solution globale de l'ESSM est une combinaison linéaire des deux solutions possibles $x^a_{(t)} = C_1 e^{\omega^a.t}$ et $x^b_{(t)} = C_2 e^{\omega^b.t}$:

$$\begin{aligned}
x_{(t)} &= C_1.e^{\omega^a.t} + C_2.e^{\omega^b.t}\\
x_{(t)} &= e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(C_1.e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} + C_2.e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Dans le cas 2, nous avons eu recours à l'utilisation de nombres imaginaires. Pas d'inquiétude... ces derniers disparaitront lors de la détermination de la solution finale, avec l'utilisation des conditions initiales.

Resolution de l'EASM

La solution particulière de l'EASM recherchée obéit aux mêmes principes que précédemment : si le terme $\epsilon_{(t)}$ se présente sous la forme $\epsilon_{(t)} = \sum_n C^{te}_n.t^n$, alors il est judicieux de chercher une solution particulière de l'EASM ayant la même forme (sauf si $\gamma = 0$, auquel cas il suffit de chercher un polynôme d'ordre $n-1$). Si $\epsilon_{(t)}$ est une fonction "quelconque", alors il faut rechercher une solution particulière de l'EASM de manière empirique. Par exemple, dans le cas particulier ou $\beta = 0$ et $\epsilon_{(t)} = C.\cos(k.t)$, on remarque que $x^p_{(t)} = \frac{C}{\gamma - \alpha.k^2}\cos(k.t)$ est une solution particulière.

Exemple d'utilisation des conditions initiales - cas ou $\Delta < 0$

Nous cherchons la solution de l'équation différentielle $\alpha.\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} + \beta.\frac{dx_{(t)}}{dt} + \gamma.x_{(t)} = 0$. Par ailleurs, nous avons $\Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma < 0$. La solution de cette équation différentielle est : $x_{(t)} = e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(C_1.e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} + C_2.e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}\right)$. Nous recherchons les constantes C_1 et C_2 grâce aux conditions initiales du problème données ci-dessous :

- a $t = 0$, $x = 0$ soit $C_1 + C_2 = 0$
- a $t = 0$, $v = \dot{x} = v_0$ soit $C_1.\left(\frac{-\beta}{2\alpha} + i.\frac{\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}\right) - C_2\left(\frac{-\beta}{2\alpha} - i.\frac{\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}\right) = v_0$

Soit $C_1 = -C_2$ avec $C_1 = \frac{\alpha.v_0}{i.\sqrt{-\Delta}}$. Il vient :

$$x_{(t)} = e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(\frac{\alpha.v_0}{i.\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} - \frac{\alpha.v_0}{i.\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}\right) = \frac{2\alpha.v_0}{\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \left(\frac{e^{\frac{i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}} - e^{\frac{-i.\sqrt{-\Delta}.t}{2\alpha}}}{2i}\right) = \frac{2\alpha.v_0}{\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \sin\left(\sqrt{-\Delta}.t/2\alpha\right)$$

$$\boxed{x_{(t)} = \frac{2\alpha.v_0}{\sqrt{-\Delta}}.e^{\frac{-\beta.t}{2\alpha}} \times \sin\left(\sqrt{-\Delta}.t/2\alpha\right)}$$

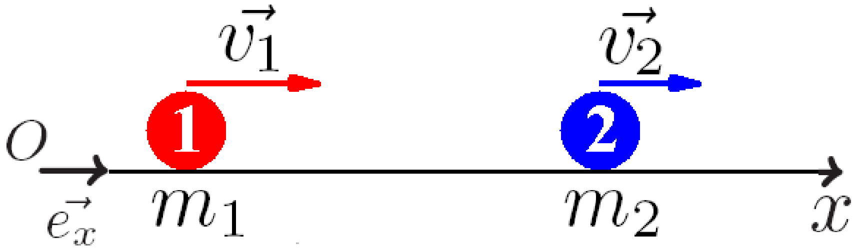
Il s'agit d'une sinusoïde amortie !

Les chocs élastiques : traitement mathématique

Retrouvez la séance d'APP sur internet :

`http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/menumeca.html`

Chocs à 1 dimension



(1) Conservation de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2'^2$

(2) Conservation de la quantité de mouvement : $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}$

Après projection de la relation (2) sur l'axe [Ox), il s'agit de résoudre le système suivant : (on pose $\mu = m_1/m_2$)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2'^2 \\ m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.v_1' + m_2.v_2' \end{cases}$$

soit

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} m_1.\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2.\left(v_2'^2 - v_2^2\right) \\ m_1.\left(v_1 - v_1'\right) = m_2.\left(v_2' - v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} \mu.\left(v_1 - v_1'\right).\left(v_1 + v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right).\left(v_2' + v_2\right) \\ \mu.\left(v_1 - v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) = (2) \text{ dans } (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} \mu.\left(v_1 - v_1'\right).\left(v_1 + v_1'\right) = \mu\left(v_1' - v_1\right).\left(v_2' + v_2\right) \\ \mu.\left(v_1 - v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} \left(v_1 + v_1'\right) = \left(v_2' + v_2\right) \\ \mu.\left(v_1 - v_1'\right) = \left(v_2' - v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) = (2) \text{ dans } (1) \\ (2) = (1) \text{ dans } (2) \end{array}\begin{cases} v_1' = v_2 - v_1 + \mu\left(v_1 - v_1'\right) + v_2 \\ v_2' = v_2 + \mu\left[v_1 - \left(v_2' + v_2 - v_1\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} v_1' + \mu.v_1' = 2v_2 + v_1\left(\mu - 1\right) \\ v_2' + \mu.v_2' = v_2\left(1 - \mu\right) + 2\mu.v_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} v_1' = \frac{2v_2 + (\mu-1).v_1}{\mu+1} \\ v_2' = \frac{2\mu v_1 + (1-\mu).v_2}{\mu+1} \end{cases}$$

$$\boxed{v_1' = \frac{2v_2 + (\mu - 1).v_1}{\mu + 1} \qquad v_2' = \frac{2\mu v_1 + (1-\mu).v_2}{\mu+1}}$$

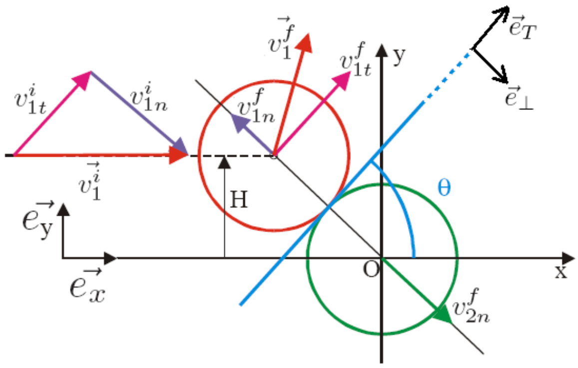
Étude des différents cas limites...

- Si $m_1 = m_2$ $(\mu = 1)$ alors $v_1' = v_2$ et $v_2' = v_1$
- Si $m_1 >> m_2$ $(\mu \to \infty)$ alors $v_1' = v_1$ et $v_2' = 2v_1 - v_2$
- Si $m_1 << m_2$ $(\mu \to 0)$ alors $v_1' = 2v_2 - v_1$ et $v_2' = v_2$

Chocs à deux dimensions

On note :

- $\vec{v_1^i}$ le vecteur vitesse initiale de la boule 1
- v_{1t}^i la composante tangentielle de la vitesse initiale de la boule 1
- v_{1n}^i la composante normale de la vitesse initiale de la boule 1
- $\vec{v_2^i}$ le vecteur vitesse initiale de la boule 2
- v_{2t}^i la composante tangentielle de la vitesse initiale de la boule 2
- v_{2n}^i la composante normale de la vitesse initiale de la boule 2
- $\vec{v_1^f}$ le vecteur vitesse final de la boule 1
- v_{1t}^f la composante tangentielle de la vitesse finale de la boule 1
- v_{1n}^f la composante normale de la vitesse finale de la boule 1
- $\vec{v_2^f}$ le vecteur vitesse final de la boule 2
- v_{2t}^f la composante tangentielle de la vitesse finale de la boule 2
- v_{2n}^f la composante normale de la vitesse finale de la boule 2



Conservation de la quantité de mouvement

$$m_1\vec{v}_1^i + m_2\vec{v}_2^i = m_1\vec{v}_1^f + m_2\vec{v}_2^f \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} (1)\; m_1.v_{1t}^i + m_2.v_{2t}^i = m_1.v_{1t}^f + m_2.v_{2t}^f & \text{(Projection sur } \vec{e_T}) \\ (2)\; m_1.v_{1n}^i + m_2.v_{2n}^i = m_1.v_{1n}^f + m_2.v_{2n}^f & \text{(Projection sur } \vec{e_N}) \end{cases}$$

Conservation des composantes tangentielles de la quantité de mouvement

La seule force à considérer au cours du choc est une force de réaction, qui est toujours appliquée perpendiculairement au plan de contact des deux boules. Ainsi la vitesse tangentielle ne change pas : aucune force tangentielle n'est appliquée, donc aucune accélération tangentielle n'a lieu, donc les vitesses tangentielles ne sont pas modifiées !

$$\begin{cases} (3)\; m_1.v_{1t}^i = m_1.v_{1t}^f \\ (4)\; m_2.v_{2t}^i = m_2.v_{2t}^f \end{cases}$$

L'équation (1) devient inutile, car v_{1t}^f et v_{2t}^f ne sont plus des inconnues du problème.

Conservation de l'énergie cinétique (le choc est élastique)

$$(5) \qquad \frac{1}{2}m_1.{v_1^i}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^i}^2 = \frac{1}{2}m_1.{v_1^f}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^f}^2$$

Résolution du système d'équation

A présent, seules les équations (2) et (5) sont "utiles" pour la résolution du problème. Il y a deux inconnues v_{1n}^f et v_{2n}^f et il y a deux équations... Nous admettons la simplification suivante : $v_2^i = 0$ (soit $v_{2n}^i = 0$ et $v_{2t}^i = 0$). Cette simplification est équivalente à un changement de référentiel. On a la décomposition suivante : $\vec{v}_k^l = v_{kt}^l.\vec{e}_t + v_{kn}^l.\vec{e}_n$ où $k = 1, 2$ et $l = i, f$.

$$\begin{cases} (2)\; m_1.v_{1n}^i + m_2.v_{2n}^i = m_1.v_{1n}^f + m_2.v_{2n}^f \\ (5)\; \frac{1}{2}m_1.{v_1^i}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^i}^2 = \frac{1}{2}m_1.{v_1^f}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^f}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2)\; m_1.v_{1n}^i = m_1.v_{1n}^f + m_2.v_{2n}^f \\ (5)\; \frac{1}{2}m_1.{v_1^i}^2 = \frac{1}{2}m_1.{v_1^f}^2 + \frac{1}{2}m_2.{v_2^f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2)\; m_1.\left(v_{1n}^i - v_{1n}^f\right) = m_2.v_{2n}^f \\ (5)\; \frac{1}{2}m_1.({v_{1n}^i}^2 + \underbrace{{v_{1t}^i}^2}_{={v_{1t}^f}^2} - {v_{1n}^f}^2 - \underbrace{{v_{1t}^f}^2}_{={v_{1t}^i}^2}) = \frac{1}{2}m_2.({v_{2n}^f}^2 + \underbrace{{v_{2t}^f}^2}_{=0}) \end{cases} \qquad \begin{cases} (2)\; v_{2n}^f = \mu\left(v_{1n}^i - v_{1n}^f\right) \\ (5)\; \mu\left({v_{1n}^i}^2 - {v_{1n}^f}^2\right) = {v_{2n}^f}^2 \end{cases}$$

Remplaçons l'équation (2) dans (5) :

$$\begin{aligned}
\mu\left({v_{1n}^i}^2 - {v_{1n}^f}^2\right) &= \mu^2\left(v_{1n}^i - v_{1n}^f\right)^2 \\
{v_{1n}^i}^2 - {v_{1n}^f}^2 &= \mu.{v_{1n}^i}^2 + \mu.{v_{1n}^f}^2 - 2\mu.v_{1n}^i.v_{1n}^f \\
{v_{1n}^f}^2.(\mu+1) - 2\mu.v_{1n}^i.v_{1n}^f + {v_{1n}^i}^2.(\mu-1) &= 0
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme linéaire du second ordre, où la variable est v_{1n}^f. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\mu^2.{v_{1n}^i}^2 - 4.(\mu+1){v_{1n}^i}^2(\mu-1) \\
&= {v_{1n}^i}^2.\left[4\mu^2 - 4(\mu+1)(\mu-1)\right] \\
&= {v_{1n}^i}^2.\left[4\mu^2 - 4\left(\mu^2-1\right)\right] \\
&= 4.{v_{1n}^i}^2
\end{aligned}$$

Les solutions possibles sont donc :

$$v_{1n}^f = \frac{2\mu.v_{1n}^i \pm \sqrt{4.{v_{1n}^i}^2}}{2(\mu+1)} = \frac{2\mu.v_{1n}^i \pm |2.v_{1n}^i|}{2(\mu+1)} = \frac{2\mu.v_{1n}^i \pm 2.v_{1n}^i}{2(\mu+1)} = \frac{\mu\pm1}{\mu+1}.v_{1n}^i$$

La solution (+) donne simplement $v_{1n}^f = v_{1n}^i$, impliquant l'absence de choc ! Seule la solution (-) est à considérer :

$$\boxed{v_{1n}^f = \frac{\mu-1}{\mu+1}.v_{1n}^i} \qquad (6)$$

Remplaçons à présent l'équation (6) dans l'équation (2) :

$$v_{2n}^f = \mu\left(v_{1n}^i + \frac{1-\mu}{1+\mu}v_{1n}^i\right) = v_{1n}^i\left(\mu + \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu}\right) = v_{1n}^i\left(\frac{\mu(1+\mu)+\mu(1-\mu)}{1+\mu}\right) = \frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^i$$

$$\boxed{v_{2n}^f = \frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^i}$$

En conclusion, il vient :

$$\begin{aligned}
v_{1n}^f &= \frac{\mu-1}{\mu+1}.v_{1n}^i \\
v_{2n}^f &= \frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^i \\
v_{1t}^f &= v_{1t}^i \\
v_{2t}^f &= v_{2t}^i = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v_1^f} &= v_{1n}^f.\vec{e_n} + v_{1t}^f.\vec{e_t} = \frac{\mu-1}{\mu+1}.v_{1n}^i.\vec{e_n} + v_{1t}^i.\vec{e_t} \\
\vec{v_2^f} &= v_{2n}^f.\vec{e_n} + v_{2t}^f.\vec{e_t} = \frac{2\mu}{1+\mu}v_{1n}^i.\vec{e_n}
\end{aligned}$$

Il est cependant plus agréable de connaître les vitesses des boules avant et après le choc dans le référentiel du laboratoire $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$. Pour cela, il suffit d'exprimer les vecteurs $\vec{e_n}$ et $\vec{e_t}$ selon les vecteurs $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{e_t} &= \cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y} \\
\vec{e_n} &= \sin\theta.\vec{e_x} - \cos\theta.\vec{e_y} \\
v_{1t}^i &= v_1^i\cos\theta \\
v_{1n}^i &= v_1^i\sin\theta \\
v_2^i = 0 \quad &\text{et} \quad {v_{1x}}^i = v_1^i \\
\theta &= Acos\left(\frac{H}{2R}\right)
\end{aligned}$$

Il vient :

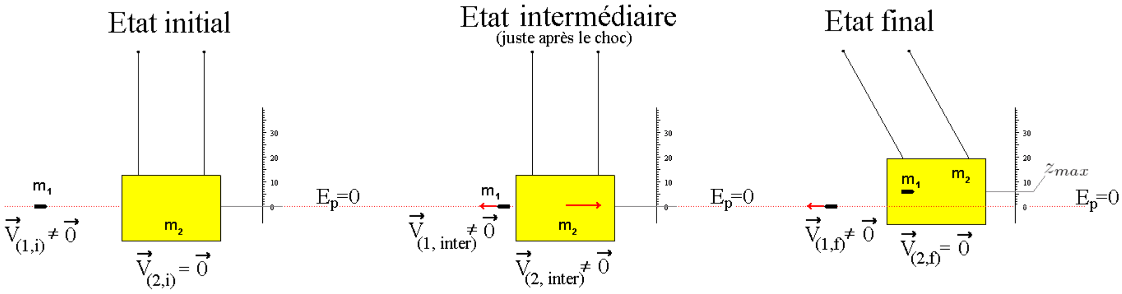
$$\begin{aligned}
\vec{v_1^f} &= v_1^i.\left(\frac{\mu+\cos2\theta}{1+\mu}\right)\vec{e_x} + v_1^i.\left(\frac{\sin2\theta}{\mu+1}\right)\vec{e_y} \\
\vec{v_2^f} &= v_1^i.\left(\frac{\mu(1-\cos2\theta)}{\mu+1}\right)\vec{e_x} - v_1^i.\left(\frac{\mu.\sin2\theta}{\mu+1}\right)\vec{e_y}
\end{aligned}$$

Si $m_1 = m_2$ ($\mu = 1$), il est facile de montrer que, dans ce cas, le produit scalaire $\vec{v_1^f}.\vec{v_2^f}$ est égal à zéro : quelque soit l'angle d'impact, les boules partent toujours à 90^o l'une de l'autre après un choc élastique.

Pour que la vitesse finale de la boule 2 forme un angle de -15^o avec l'axe [Ox), il faut que $v_{2y}^f/v_{2x}^f = \tan -15$, soit $\tan(-15) = \frac{-v_1^i.\left(\frac{\mu.\sin2\theta}{\mu+1}\right)}{v_1^i.\frac{\mu(1-\cos2\theta)}{\mu+1}} = \frac{-\sin2\theta}{1-\cos2\theta} = \frac{-2.\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\tan^{-1}\theta = \tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ soit $\theta = \frac{\pi}{2} - 15$ (logique !) or $H = 2.R.\cos(\theta)$ il vient $H = 2.R.\cos\left(\frac{\pi}{2}-15\right)$. L'angle après le choc ne dépend que du paramètre d'impact !

Choc inélastique : l'exemple du pendule balistique

Considérons dans un premier temps que le choc est élastique. Nous avons :



$$E_M = E_c + E_p$$
$$E_M = E_{c,1} + E_{p,1} + E_{c,2} + E_{p,2}$$
$$E_M = \frac{1}{2} m_1.v_{(1,i)}^2 + 0 + 0 + 0$$

$$E_M = E_c + E_p$$
$$E_M = E_{c,1} + E_{p,1} + E_{c,2} + E_{p,2}$$
$$E_M = \frac{1}{2} m_1.v_{(1,inter)}^2 + 0 + \frac{1}{2} m_1.v_{(2,inter)}^2 + 0$$
$$\text{avec } v_{(1,inter)} = \frac{(\mu-1).v_{(1,i)}}{(\mu+1)}$$
$$\text{avec } v_{(2,inter)} = \frac{2.\mu.v_{(1,i)}}{(\mu+1)}$$

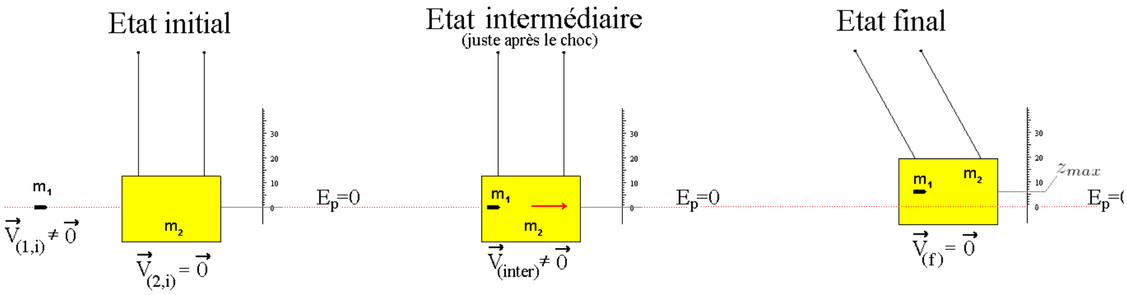
$$E_M = E_c + E_p$$
$$E_M = E_{c,1} + E_{p,1} + E_{c,2} + E_{p,2}$$
$$E_M = \frac{1}{2} m_1.v_{(1,f)}^2 + 0 + 0 + m_2.g.h$$
$$E_M = \frac{1}{2} m_1.v_{(1,inter)}^2 + 0 + 0 + m_2.g.h$$
$$E_M = \frac{1}{2} m_1.\left(\frac{(\mu-1).v_{(1,i)}}{(\mu+1)}\right)^2 + 0 + 0 + m_2.g.h$$

D'après le théorème de conservation de l'énergie mécanique, $E_M^i = E_f^f$ soit :

$$\frac{1}{2} m_1.v_{(1,i)}^2 = \frac{1}{2} m_1.\left(\frac{(\mu-1).v_{(1,i)}}{(\mu+1)}\right)^2 + m_2.g.h$$

$$h = \frac{\mu.v_{(1,i)}^2}{2.g}\left[1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2\right]$$

Considérons à présent que le choc est inélastique et que le projectile 1 s'enfonce complétement et s'immobilise dans l'objet 2. Seule la quantité de mouvement est conservée au cours du choc. Ainsi $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ soit $m_1.\vec{v}_{(1,i)} = (m_1 + m_2).\vec{v}_{(inter)}$



$$E_M = E_c + E_p$$
$$E_M = E_{c,1} + E_{p,1} + E_{c,2} + E_{p,2}$$
$$E_M = \frac{1}{2} m_1.v_{(1,i)}^2 + 0 + 0 + 0$$

$$E_M = E_c + E_p$$
$$E_M = \frac{1}{2}(m_1 + m_2).v_{(inter)}^2 + 0$$
$$\text{avec } v_{(inter)} = \frac{m_1.v_{(1,i)}}{(m_1+m_2)}$$

$$E_M = E_c + E_p$$
$$E_M = 0 + (m_1 + m_2).g.h$$

D'après le théorème de conservation de l'énergie mécanique <u>entre l'état intermédiaire et l'état final</u>, on a :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2).v_{(inter)}^2 = (m_1 + m_2).g.h$$
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2).\left[\frac{m_1.v_{(1,i)}}{(m_1+m_2)}\right]^2 = (m_1 + m_2).g.h$$
$$h = \frac{1}{2g}\left[\frac{m_1.v_{(1,i)}}{(m_1+m_2)}\right]^2$$

Applications numériques :

Le cas elastique								
m1	0.02	Kg	=>	mu=	0.007			
m2	2.98	Kg						
v1i	1080	Km/h	=>	300	m/s			
g	10	m.s-2						
Etat initial			Etat intermédiaire			Etat final		
	Système 1	Système 2		Système 1	Système 2		Système 1	Système 2
v (m/s)	300	0	v (m/s)	-296	4	v (m/s)	-296	0
Ec (J)	900	0	Ec (J)	876.16	23.84	Ec (J)	876.16	0
Ep (J)	0	0	Ep (J)	0	0	Ep (J)	0	23.84
soit	h =	0.8	m					
	h =	0.8	m					

Le cas inelastique								
m1	0.02	Kg	=>	mu=	0.007			
m2	2.98	Kg						
v1i	1080	Km/h	=>	300	m/s			
g	10	m.s-2						
Etat initial			Etat intermédiaire			Etat final		
	Système 1	Système 2		Système groupé			Système groupé	
v (m/s)	300	0	v (m/s)	2		v (m/s)	0	
Ec (J)	900	0	Ec (J)	6		Ec (J)	0	
Ep (J)	0	0	Ep (J)	0		Ep (J)	6	
soit	h =	0.2	m					
	h=	0.2	m					

La différence d'énergie potentielle entre le cas élastique et inélastique provient de l'énergie nécessaire qu'il faut fournir pour encastrer et arrêter le projectile dans le bloc (choc mou). Cette énergie est "utilisée" pour déformer le bloc/projectile.

Formulaire

Changement de référentiel

Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_{(M/\Re)} = \vec{v}_{(\Re'/\Re)} + \vec{v}_{(M/\Re')}$
avec $\vec{v}_{(\Re'/\Re)} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OO'}\right) + \vec{\omega}_e \wedge \vec{O'M}$

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}_{(M/\Re)} = \vec{a}_{(\Re'/\Re)} + \vec{a}_c + \vec{a}_{(M/\Re')}$
avec $\vec{a}_{(\Re'/\Re)} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{OO'}\right) + \frac{d\vec{\omega_e}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega_e} \wedge \left(\vec{\omega_e} \wedge \vec{O'M}\right)$
et $\vec{a}_c = 2\vec{\omega_e} \wedge \vec{v}_{(M/\Re')}$

Relations d'Euler

$e^{i.\theta} = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$

$\cos(\theta) = \frac{e^{i.\theta}+e^{-i.\theta}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{e^{i.\theta}-e^{-i.\theta}}{2.i}$

Trigonométrie

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos a \times \cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

$\sin a \times \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

$\cos a \times \sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Expression du vecteur gradient et du vecteur rotationel

en coordonnées cartésiennes...

$\vec{grad} = \frac{\partial}{\partial x}.\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{e_z}$

$\vec{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right).\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right).\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right).\vec{e}_z$

en coordonnées cylindriques...

$\vec{grad} = \frac{\partial}{\partial \rho}.\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}.\vec{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{e_z}$

$\vec{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right).\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right).\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho.F_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right).\vec{e}_z$

en coordonnées sphériques...

$\vec{grad} = \frac{\partial}{\partial r}.\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.\vec{e_\theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}.\vec{e_\phi}$

$\vec{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial(\sin\theta F_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right)\frac{\vec{e_r}}{r.\sin\theta} + \left(\frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r.F_\varphi)}{\partial r}\right).\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial(r.F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\frac{\vec{e}_\varphi}{r}$

Expression générale du vecteur position

$\vec{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$ *(en coordonnées cartésiennes)*

$\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z}$ *(en coordonnées cylindriques)*

$\vec{OM} = r.\vec{e_r}$ *(en coordonnées sphériques)*

$\vec{OM} = ...$*(repère de Frenet)*

Expression générale du vecteur vitesse

$\vec{v} = \dot{x}.\vec{e_x} + \dot{y}.\vec{e_y} + \dot{z}.\vec{e_z}$ *(en coordonnées cartésiennes)*

$\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + \dot{z}.\vec{e_z}$ *(en coordonnées cylindriques)*

$\vec{v} = \dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi}$ *(en coordonnées sphériques)*

$\vec{v} = \frac{ds}{dt}.\vec{e_T}$ *(repère de Frenet)*

Expression générale du vecteur accélération

$\vec{a} = \ddot{x}.\vec{e_x} + \ddot{y}.\vec{e_y} + \ddot{z}.\vec{e_z}$ *(en coordonnées cartésiennes)*

$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right).\vec{e_\theta} + \ddot{z}.\vec{e_z}$ *(en coordonnées cylindriques)*

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right).\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e_\theta} + \left(2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta\right).\vec{e_\phi}$ *(en c. sphériques)*

$\vec{a} = \frac{d||\vec{v}||}{dt}.\vec{e_T} + \frac{||\vec{v}||^2}{R}.\vec{e_N}$ *(repère de Frenet)*