



LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Optique

MPSI-PCSI-PTSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

P. BRENDERS • M. SAUZEIX

Nouveau programme


Copyrighted material



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Optique

MPSI – PCSI – PTSI

P. BRENDERS

Agrégé de Sciences Physiques
Professeur en classes préparatoires PCSI, Lycée des Chartreux, Lyon

M. SAUZEIX

Agrégé de Sciences Physiques, ingénieur ESEO
Professeur en BTS électrotechnique, Lycée Édouard Branly, Lyon

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex



Copyrighted material

LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Mathématiques 1^{re} année

- Algèbre et géométrie MPSI
- Algèbre et géométrie PCSI
- Analyse MPSI
- Analyse PCSI

Physique 1^{re} année

- Mécanique MPSI / Mécanique PCSI / Mécanique PTSI
- Électromagnétisme MPSI / Électromagnétisme PCSI / Électromagnétisme PTSI
- Électrocinétique MPSI / Électrocinétique PCSI / Électrocinétique PTSI
- Optique MPSI-PCSI-PTSI
- Thermodynamique MPSI / Thermodynamique PCSI / Thermodynamique PTSI

Chimie 1^{re} année

- Chimie PCSI
- Chimie MPSI
- Chimie PTSI

Exercices 1^{re} année

- Mathématiques MPSI / Mathématiques PCSI
- Physique MPSI / Physique PCSI / Physique PTSI

Maquette : *Sophie Martinet*
Couverture : *Sophie Martinet*
Réalisation : *Laser Graphie*
Édition : *Julien Lionnet*

© Bréal 2003

Toute reproduction même partielle interdite.

Dépôt légal : juillet 2006

ISBN 2 7495 0228 4

Imprimé en France par I.M.E.

25110 Baume-les-Dames

2090345/02





Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à la fois aux étudiants de première et de deuxième année. En effet, l'optique géométrique, enseignée en sup sans être réinvestie en spé – et de ce fait, souvent négligée par les candidats –, constitue un thème prisé au concours, notamment à l'oral. La manière dont nous avons rédigé cet ouvrage intègre donc ces deux temps forts : apprendre, mais aussi réviser.

Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.

Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.

Les **Exercices**, tirés d'annales de concours et classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos  ou ). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Nous espérons que ce nouveau Précis aidera les étudiants à accéder avec confiance en deuxième année, puis d'intégrer une école et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse infos@editions-breal.fr.

L'éditeur et les auteurs.

This One



OZST-37K-F43F

Sommaire

Chapitre 1 ■ Généralités sur la lumière

A. Qu'est ce que l'optique aujourd'hui ?	8
B. Généralités sur la lumière	8
C. Notion d'onde progressive sinusoïdale	11
D. Propagation des ondes électromagnétiques : cas de la lumière	15
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i>	22
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i>	23

Chapitre 2 ■ Lois et principes de l'optique géométrique

A. Le rayon lumineux de l'optique géométrique	28
B. Lois de l'optique géométrique	29
C. Applications	36
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i>	44
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i>	49

Chapitre 3 ■ Formation des images

A. Notion d'image	70
B. Notion de point objet et de point image en référence à un système optique	70
C. Stigmatisme rigoureux	73
D. Les systèmes centrés	77
E. Aplanétisme rigoureux	77
F. Stigmatisme approché	77
G. Les conditions de Gauss	79
H. Application au dioptré plan	82
I. Aberrations des systèmes optiques	84
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i>	88
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i>	91

Chapitre 4 ■ Miroirs sphériques

A. Introduction	102
B. Stigmatisme et aplanétisme d'un miroir sphérique	103
C. Construction géométrique d'une image dans les conditions de Gauss	109
D. Relations de conjugaison du miroir sphérique dans l'approximation de Gauss ..	116
E. Cas particulier du miroir plan	119
F. Champ d'un miroir	120
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i>	121
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i>	126

Chapitre 5 ■ Lentilles minces sphériques

A. Lentilles sphériques	148
B. Algébrisation – espaces objet et image	150
C. Stigmatisme et aplanétisme d'une lentille mince	151
D. Propriétés des lentilles minces	153
E. Construction géométrique d'une image	156
F. Relations de conjugaison et de grandissement	161
G. Associations de lentilles minces	163
H. Aberration chromatique d'une lentille	164
<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre.</i>	167
<i>Exercices : énoncés, indications, solutions.</i>	171

Index	191
--------------------	-----

Généralités sur la lumière

Introduction

En classe de terminale la propagation des ondes a été abordée et le caractère ondulatoire de la lumière mis en évidence par des expériences de diffraction. La propagation de la lumière dans un milieu transparent a permis de préciser la notion d'indice optique dont la variation avec la fréquence de l'onde lumineuse, ou si l'on préfère, la couleur, confère au milieu transparent un caractère dispersif.

Dans ce chapitre d'introduction, nous situerons dans notre société l'importance de l'optique en tant que science, et nous mettrons en place les bases permettant d'aborder par la suite l'optique géométrique.

Plan du chapitre 1

A. Qu'est ce que l'optique aujourd'hui ?	08
B. Généralités sur la lumière	
1. Approche physique de la lumière et de ses interactions avec notre environnement	08
2. Approche historique : les modèles physiques de la lumière	09
C. Notion d'onde progressive sinusoïdale	11
1. Onde progressive	11
2. Onde progressive périodique	13
3. Onde progressive sinusoïdale	13
4. Dispersion d'une onde	14
5. Autre représentation de la propagation d'une onde	14
D. Propagation des ondes électromagnétiques : cas de la lumière	15
1. Propagation de la lumière dans le vide	15
2. Mesure de la vitesse de la lumière	17
3. Propagation de la lumière dans les milieux matériels transparents	18
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	22
Énoncés des exercices	23
Solutions des exercices	24

A. Qu'est-ce que l'optique aujourd'hui ?

L'optique est une science dont les utilisations sont très répandues dans notre société. Elle s'inscrit dans notre quotidien sous forme de sources de lumière diverses, d'écrans cathodiques de télévision ou d'ordinateur, de télécommandes à infrarouge, sans oublier le lecteur de disque compact à laser par exemple.

Les technologies de l'information et de la communication (TIC) se répandent rapidement dans notre société. Les ordinateurs à grande puissance de traitement, les DVD, la fibre optique¹, les écrans à cristaux liquides y contribuent et la définition de l'optique, qui est devenue une science multidisciplinaire, évolue en conséquence.

Aussi, nous dirons que l'optique aujourd'hui est la science et le génie de la génération, de la manipulation, de la transmission et de la détection de photons².

1. Une seule fibre optique, dont le diamètre est de l'ordre de celui d'un fil de pêche, peut transmettre simultanément 120 000 communications téléphoniques.

2. Le *photon* est une particule élémentaire associée à la propagation de la lumière et plus généralement à la propagation des ondes électromagnétiques.

B. Généralités sur la lumière

B.1. Approche physique de la lumière et de ses interactions avec notre environnement

L'observation courante nous montre que la lumière est émise par la matière (filament de l'ampoule électrique, gaz chauffé dans les flammes ou excité dans les tubes de type néon...), qu'elle se propage à travers un milieu (air, eau, verre...) jusqu'aux récepteurs (œil, plaque photographique, cellule CCD dans les caméras numériques) où elle se manifeste par son action.

• Les sources de lumière

Certaines sources de lumière transforment une énergie de type électrique, chimique ou thermique en énergie lumineuse. Ces sources sont dites primaires car elles sont à l'origine de cette transformation comme dans le cas de l'ampoule électrique ou du soleil.

D'autres sources sont dites secondaires³ car elles ne font que réémettre la lumière qu'elles reçoivent comme dans le cas de la lune ou des planètes qui sont des objets éclairés par le soleil.

Les sources lumineuses sont toujours étendues. Par contre, une source peut être considérée comme ponctuelle si nous regardons son action, à l'aide d'un récepteur⁴, en des points situés très loin de la source.

• Les milieux de propagation

Entre la source et le récepteur, la lumière se propage dans des milieux différents : transparents, translucides ou opaques à la lumière. La lumière se propage aussi dans le vide.

• Les récepteurs de lumière

Enfin, les récepteurs transforment l'énergie lumineuse reçue en une énergie de type électrique, chimique ou thermique.

La lumière assure donc le transport d'énergie depuis la source vers le récepteur.

Si nous plaçons un corps entre l'œil et un objet lumineux, ce corps est dit :

– *transparent* s'il n'altère pas la visibilité de l'objet lumineux : c'est le cas du verre.

– *translucide* s'il altère la visibilité de l'objet : c'est le cas du verre dépoli.

3. Les *sources secondaires* sont aussi appelées objets éclairés si l'on considère qu'une source de lumière est un corps qui produit et émet de la lumière.

4. Un *récepteur* de lumière est un corps dont certaines propriétés varient quand il reçoit de la lumière.

« *Très loin de la source* » signifie que la distance L entre la source et le récepteur est très supérieure à la dimension transversale d de la source. Dans ce cas, la dimension transversale de la source n'est plus prise en compte.

- *opaque* si l'on ne peut voir l'objet au travers : c'est le cas du bois, du métal. Un corps opaque peut être :
 - *opaque absorbant* si l'énergie lumineuse reçue est totalement transformée en une autre énergie (thermique par exemple) : c'est le cas des matériaux de couleur noire.
 - *opaque diffusant* s'il réémet la lumière dans toutes les directions. Il peut éventuellement absorber une partie de la lumière. C'est le cas le plus général.
 - *opaque réfléchissant* si la lumière est renvoyée dans une direction particulière : c'est le cas des miroirs.

La lumière véhicule information et énergie sans déplacement de matière, depuis une source vers un récepteur, au travers d'un milieu qui peut être le vide.

B.2. Approche historique : les modèles physiques de la lumière

Très tôt les hommes s'interrogent sur la nature de la lumière et essayent d'en donner différentes modélisations¹ ou théories pour expliquer leurs observations. Ainsi se développe l'optique, branche de la physique qui s'intéresse en priorité à l'étude des images obtenues par l'œil ou par des instruments.

B.2.1 – Modèle du rayon lumineux

Le premier modèle scientifique dont nous gardons trace est celui du rayon lumineux, qui ne dit rien de la nature de la lumière mais permet aux grecs, comme Euclide², de développer l'optique géométrique liée à la réflexion de la lumière, notamment sur les miroirs.

Par la suite, et jusqu'au XVI^e siècle, l'optique se limite à des questions de géométrie simple alors qu'en Italie sont mis au point expérimentalement des verres correcteurs pour la vue, en 1285, et une lunette d'approche en 1590.

Snell en 1621 puis Descartes en 1637 trouvent les lois de la réfraction de la lumière dans les milieux matériels.

Grimaldi³, en 1665, met en évidence un nouveau phénomène lumineux qu'il nomme diffraction et l'interprète comme un mouvement de fluide, en le comparant avec ce qui se passe à la surface de l'eau dans un port. Fin XVII^e et début XVIII^e, deux théories s'opposent concernant la lumière :

- la théorie ondulatoire, défendue par Huygens (1678), pour qui la lumière est une onde se propageant comme les rides se déplacent à la surface de l'eau ;
- la théorie corpusculaire, défendue par Newton (1704) pour qui la lumière est formée de corpuscules rebondissant sur les objets, selon les lois de la mécanique.

B.2.2 – Modèle ondulatoire

Les travaux de Huygens et Newton permettent de formuler et d'approfondir les questions posées au sujet de la lumière. La méthode expérimentale, initiée par Galilée, montre les contradictions du modèle proposé par Newton. Le modèle ondulatoire l'emporte sur le fond mais le modèle corpusculaire de Newton persiste en raison de l'aura grandissante de la mécanique qu'il a développée.

1. Un modèle est un schéma mental de la réalité, qui ne garde que les aspects estimés essentiels et qui rend cette réalité accessible aux calculs et à la prévision. Modéliser est un acte fondamental en physique.

2. Euclide (-300), est l'inventeur du rayon lumineux, filet élémentaire de lumière, qui selon lui part de l'œil et se dirige vers l'objet. Il faudra attendre Alhazen et l'an 1000 pour que le rayon visuel soit considéré comme reçu et non émis par l'œil.

3. Grimaldi a l'idée de ne laisser entrer dans une pièce qu'un très fin filet de lumière, et de placer sur son chemin un très petit objet : un cheveu ! Sur un écran placé au delà du cheveu, il observe que le bord de l'ombre du cheveu n'est pas parfaitement défini et qu'elle est bordée par des franges colorées. Il mène alors une étude scientifique systématique, pour conclure à la présence d'un nouvel effet qu'il nomme diffraction.



Fig. 1 – Figure de *diffraction* donnée par une ouverture circulaire, de diamètre 1 mm, éclairée en lumière parallèle. L'observation est faite sur un écran placé à plusieurs mètres.

1. Hertz en 1887 vérifia expérimentalement l'existence des *ondes électromagnétiques* que l'on qualifia d'ondes « hertziennes » et que nous connaissons bien (radiodiffusion, téléphone portable, télédiffusion...).
2. En optique, une onde lumineuse *monochromatique* correspond à une radiation dont la couleur est unique.
3. Ainsi fonctionnent les détecteurs nommés *cellules photoélectriques*, utilisés pour détecter l'information lumineuse comme par exemple dans le lecteur de CD rom.

4. La *mécanique quantique* est une théorie du monde microscopique qui décrit l'état et l'évolution à l'échelle des molécules, des atomes et des particules. Elle a été établie à ses débuts par Heisenberg (1925) Schrödinger (1926), Dirac (1926)...

Le modèle ondulatoire se développe et Fresnel donne, en 1818, une explication des phénomènes de diffraction (fig. 1) et d'interférences de la lumière dans le cadre de cette théorie.

Le modèle corpusculaire de Newton est définitivement abandonné quand Foucault, en 1850, montre expérimentalement que la vitesse de la lumière est plus petite dans l'eau que dans l'air.

Maxwell édifie en 1873 la théorie électromagnétique¹ qui montre que la lumière est elle-même une onde électromagnétique et qu'elle résulte de la propagation d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} variant au cours du temps.

B.2.3 – Modèle corpusculaire

L'optique doit aussi rendre compte des échanges d'énergie qui résultent de l'interaction entre la matière et le rayonnement comme l'émission de lumière dans les sources lumineuses (soleil, ampoules électriques) ou l'absorption de lumière dans les récepteurs (œil, plantes).

Or, l'électromagnétisme de Maxwell ne rend pas compte des interactions lumière-matière, ce qui montre l'incomplétude de cette théorie.

Hertz découvre qu'un faisceau lumineux monochromatique² frappant un métal en arrache des électrons³. Cet effet photoélectrique ne s'explique pas dans la théorie de Maxwell.

Pour résoudre cette difficulté, Einstein introduit en 1905 un modèle corpusculaire dans lequel la lumière est décrite à l'aide de particules, les photons, de masse nulle, se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide.

L'énergie d'un photon est $\mathcal{E} = h\nu$, mesurée en joules (J) avec $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde en hertz.

Les seules énergies possibles d'une onde électromagnétique de fréquence ν sont des multiples de cette plus petite quantité d'énergie que l'on appelle un quantum. L'énergie transportée par la lumière ne varie donc pas continûment, mais de façon discrète.

Dans le modèle corpusculaire, les échanges d'énergie avec la matière se font par paquets d'énergie élémentaires indivisibles : les photons.

B.2.4 – Dualité onde-corpuscule – Électrodynamique quantique

Dès lors, la lumière présente deux aspects, l'un ondulatoire, l'autre corpusculaire et nous devons parler de dualité onde-corpuscule pour caractériser la nature de la lumière, c'est à dire la considérer à la fois comme une onde et comme un corpuscule.

Le modèle de la mécanique quantique⁴ améliore ensuite cette approche en prenant simultanément en compte les notions d'onde et de corpuscule pour introduire le concept de « fonction d'onde ».

L'expérimentation met cependant en évidence quelques contradictions entre les modèles ondulatoire et corpusculaire.

En 1954, Feynman, Schwinger et Tomoga résolvent ces problèmes en donnant une théorie unifiée qui porte le nom d'électrodynamique quantique et qui constitue, à l'heure actuelle, la théorie la plus aboutie concernant la lumière.

B.2.5 – Quel modèle utiliser ?

Nous disposons donc de plusieurs modèles de la lumière dont celui de l'électrodynamique quantique qui constitue le modèle le plus performant mais aussi le plus complexe.

Faut-il pour autant rejeter les modèles précédents ?

Non, car en physique un modèle ne remet pas fondamentalement en cause le précédent modèle : il l'englobe. Un modèle reste vrai dans le cadre où il a été établi et reconnu par la démarche scientifique¹.

Comme nous nous intéresserons cette année surtout aux images optiques, et non aux échanges d'énergie entre les sources, les récepteurs, et le rayonnement, nous limiterons le développement du modèle corpusculaire.

Le modèle de l'onde électromagnétique² constituera donc le fondement qui nous permettra d'interpréter nos observations concernant la lumière.

1. Par exemple, le modèle corpusculaire de Newton n'a pas été reconnu par la démarche scientifique.

2. L'optique géométrique, approximation de la théorie électromagnétique, sera abordée au prochain chapitre.

3. Un milieu est homogène s'il a les mêmes propriétés en tous ses points.

C. Notion d'onde progressive sinusoïdale

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux caractéristiques d'un signal se propageant à la surface de l'eau d'une cuve à ondes. Un tel milieu sera supposé homogène³.

C.1. Onde progressive

• Nature de l'onde

En un point S de la surface de l'eau initialement immobile d'une cuve à ondes, nous produisons une perturbation de l'eau à l'aide d'un exciteur. En un point R de la surface de l'eau, nous avons placé un petit flotteur, un bouchon de pêche par exemple.

Nous reconnaissons la situation physique déjà rencontrée : S est la source, l'eau est le milieu de propagation et R est le récepteur.

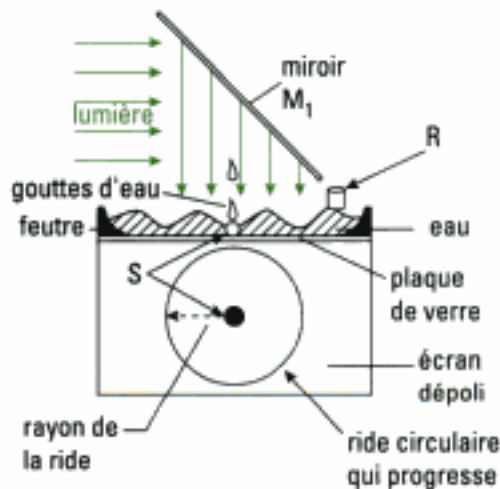


Fig. 2 – Cuve à ondes, vue de face du verre dépoli. Ce dispositif permet d'observer la propagation des signaux à la surface de l'eau, son principe fait appel aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière qui nous permet d'observer ici la propagation d'une onde mécanique.

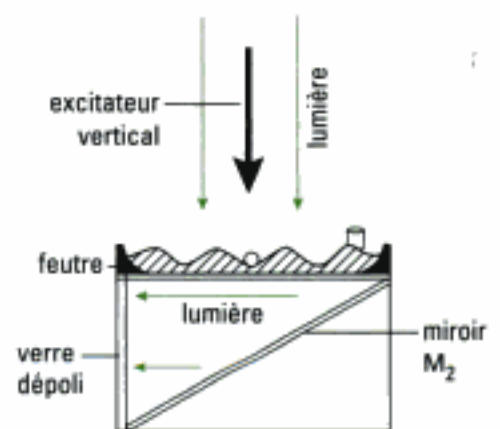


Fig. 3 – Cuve à ondes, vue de droite. Nous considérons aussi que l'onde est amortie par les feutres aux bords de la cuve, de sorte qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

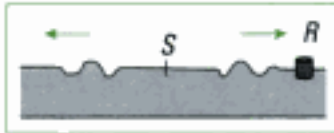


Fig. 4 – À une date t donnée, coupe de la surface de l'eau montrant une ride qui se propage depuis S.

1. À une date t donnée, l'élongation d'un point M de la surface de l'eau est le déplacement de ce point par rapport à sa position d'équilibre.

2. Il est d'usage d'appeler *célérité* c la vitesse de déplacement de l'onde, information immatérielle, et d'attribuer le terme de vitesse v au déplacement matériel d'un corps, comme ici le flotteur. Dans ce chapitre, comme nous ne nous intéresserons qu'à l'onde, nous utiliserons ces deux notations pour indiquer des *célérités*.

3. Pour une profondeur d'eau de l'ordre du centimètre, la célérité vaut environ 30 cm/s alors qu'elle est de l'ordre de 1 m/s pour le mercure.

Si la profondeur d'eau est de 3 m, la vitesse est de l'ordre de 5 m/s.

4. Un milieu est dit *isotrope* si ses propriétés, autour d'un point du milieu, sont les mêmes dans toutes les directions.

Dès que la perturbation est créée, nous observons à la surface de l'eau la propagation d'une onde dans toutes les directions qui lui sont offertes sous la forme d'une ride circulaire (fig. 2 et 4) dont le rayon grandit avec le temps ; cette onde progresse de la source vers le récepteur. Nous remarquons que le flotteur ne fait que monter et descendre, ce qui indique que l'onde ne transporte pas de matière de S vers R.

Ce phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu, sans transport de matière, est appelé **onde progressive**.

Dans le cas présent, nous observons une **onde mécanique** car ce qui est mis en mouvement verticalement est de la matière, ici l'eau, le flotteur.

Comme l'eau du milieu de propagation est mise en mouvement dans une direction verticale, et que cette direction est perpendiculaire à la direction de propagation (ici horizontale de S vers R) nous disons que c'est une **onde transversale**.

L'onde à la surface de l'eau est une onde mécanique transversale.

• Propriétés de l'onde

L'onde transporte de l'énergie puisque le flotteur monte et descend, et de l'information, en faisant l'économie du transport de matière de S vers R.

Nous observons de plus que l'**élongation¹ de l'onde décroît** lorsque l'onde s'éloigne de la source. En effet, il y a bien transport d'énergie par l'onde puisque le flotteur monte et descend. Cependant, l'énergie totale, donnée au milieu à l'instant origine par l'excitateur, doit se répartir sur une ride de rayon de plus en plus grand, donc une ride de plus en plus longue : en conséquence l'élongation décroît lorsque le rayon de la ride augmente.

Nous pouvons aussi mesurer la **célérité²** de l'onde en divisant la distance qu'elle parcourt pendant une durée donnée par la durée de ce parcours, à condition de considérer un déplacement le long d'un rayon.

Si l'élongation imposée au milieu est petite, la célérité v de l'onde ne dépend pas de la valeur de l'élongation ou de la forme du signal ; le milieu est alors dit linéaire.

Par contre, la **célérité de l'onde dépend de la nature du milieu³** (eau, mercure, profondeur...) et de son état physique (température, rigidité...).

Si la célérité ne dépend pas du rayon considéré, le milieu est dit **isotrope⁴** et à un instant t donné la ride est circulaire.

Dans ce cas, pour une étude de la surface de l'eau à un instant donné, ou une étude temporelle à une distance donnée de la source supposée ponctuelle, nous pouvons nous contenter d'étudier le phénomène de propagation le long d'un rayon, ce qui est plus simple. L'état de toute la surface de la cuve s'en déduit alors par rotation du rayon autour de la source.

Dans la suite, nous considérons que sont maintenues les conditions expérimentales précédentes concernant le milieu de propagation et la cuve à ondes.

L'onde progressive qui se propage à la surface de l'eau se manifeste par une perturbation non périodique du milieu, sans transport de matière. La propagation d'une onde n'obéit donc pas aux mêmes lois que le mouvement d'un solide.

La célérité de l'onde est indépendante de la perturbation (le milieu est considéré linéaire) et elle dépend de l'état physique du milieu.

C.2. Onde progressive périodique

Les vibrations de l'excitateur sont maintenant régulièrement espacées d'une durée de T secondes.

D'une part, chaque point de la surface de l'eau, déjà atteint par l'onde, est alors perturbé identiquement toutes les T secondes.

Définition 1

T constitue la période temporelle de l'onde : c'est celle de la source.

D'autre part, si nous regardons la surface de l'eau à une date donnée, nous observons des perturbations régulièrement séparées dans l'espace (fig. 5).

Définition 2

La période spatiale λ est la plus petite distance qui sépare deux points du milieu de propagation qui ont même état vibratoire.



Fig. 5 – État de la surface de l'eau vue en coupe, à une date t donnée, dans le cas de la propagation d'une onde progressive périodique non sinusoïdale.

1. En optique ou en physique des ondes, la fréquence est notée ν en lieu et place de f ou N adopté dans les autres domaines de la physique (signaux électriques...).

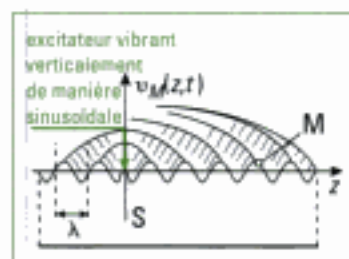


Fig. 6 – État de la surface de l'eau à une date donnée dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale.

La propagation est transversale. Les crêtes et les vagues sont distribuées sur des cercles équidistants.

2. Des points de même état vibratoire vivent en phase. Une surface d'onde est une surface sur laquelle la phase de l'onde est constante à une date t donnée. Pour cela on doit donc avoir aussi $z = \text{cte}$, ce qui montre que les surfaces d'onde sont des cercles, ceux que l'on observe effectivement en figure 6. Sur ces surfaces telles que $z = \text{cte}$ on a $u_M = \text{cte}$.

C.3. Onde progressive sinusoïdale

La perturbation u_S , en S d'abscisse $z = 0$, est toujours assurée par l'excitateur qui vibre à présent de manière sinusoïdale au cours du temps (fig. 6).

On a donc $u_S(0, t) = U_m \cos(2\pi\nu t)$ avec U_m l'amplitude de l'onde en mètre (m) et $\nu = \frac{1}{T}$, sa fréquence¹, en hertz (Hz).

Pour étudier l'allure de la surface de l'eau lorsque l'onde progressive sinusoïdale se propage à la vitesse v , considérons cette allure le long d'un rayon puisque nous avons vu que cette limitation de l'étude, avec les hypothèses admises concernant le milieu, ne restreint pas sa généralité.

L'élongation u_M du point M d'abscisse z de la surface, à la date t , est celle que possédait le point S à la date $t - \tau$ avec $\tau = \frac{z}{v}$.

On a donc :

$$u_M(z, t) = U_m \cos[2\pi\nu(t - \tau)] = U_m \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{z}{v}\right)\right],$$

où $2\pi\nu\left(t - \frac{z}{v}\right)$ est la phase de l'onde².

C.3.1 – Double périodicité

C.3.1.1 – Période temporelle

Considérons un point M d'abscisse $z = \text{cte}$ et observons sa vibration au cours du temps.

Quand t augmente de $T = \frac{1}{\nu}$, en remplaçant t par $t + T$ dans l'expression de $u_M(z, t)$, la phase augmente de 2π radians.

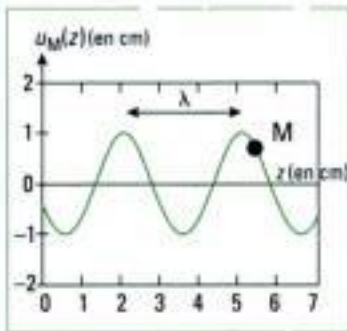


Fig. 7 – À une date donnée, état de la surface de l'eau le long d'un rayon lors de la propagation d'une onde progressive.

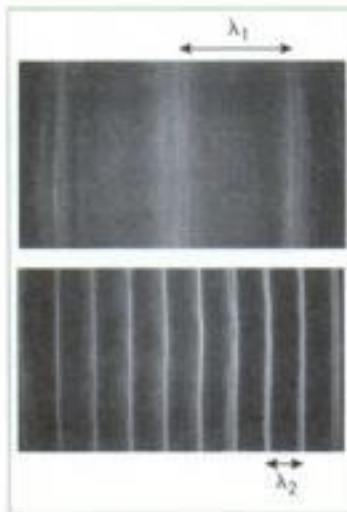


Fig. 8a – Observations d'ondes rectilignes à la surface de l'eau dans deux expériences pour lesquelles la hauteur d'eau est de 5 cm.

En haut, la source vibre à la fréquence $\nu_1 = 5$ Hz ; la longueur d'onde mesurée expérimentalement est $\lambda_1 = 9,5$ cm.

En bas, la source vibre à la fréquence de $\nu_2 = 10$ Hz ; la longueur d'onde mesurée est $\lambda_2 = 3$ cm.

Si la célérité ne dépendait pas de la fréquence, on aurait :

$$\lambda_2 = \frac{v}{\nu_2} = \frac{v}{2\nu_1}, \text{ donc } \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$$

Ce qui n'est pas vérifié expérimentalement. L'hypothèse est donc fautive.

1. Il est rare qu'une onde soit purement sinusoïdale : la notion de paquet d'ondes revêt donc toute son importance.

On a donc : $u_M(z, t) = u_M(z, t + T)$

Chaque point du milieu vibre donc à la fréquence de la source.

C.3.1.2 – Période spatiale

Toujours avec l'hypothèse de l'étude de l'état de la surface de l'eau le long d'un rayon, observons à une même date, $t = \text{cte}$, la surface de l'eau (fig. 6 et 7).

Si l'on s'éloigne de M d'une distance $\lambda = \frac{v}{\nu}$, en remplaçant z par $z + \lambda$ dans

l'expression de $u_M(z, t)$, la phase augmente de 2π radians.

On a donc $u_M(z, t) = u_M(z + \lambda, t)$.

Deux points successifs du milieu, séparés d'une distance $\lambda = \frac{v}{\nu}$ ont donc le

même état vibratoire. Comme $\lambda = \frac{v}{\nu} = v \cdot T$, la période spatiale est aussi la longueur parcourue par l'onde en une période. Pour cette raison elle est nommée longueur d'onde et mesurée en mètre (m).

$\lambda = v \cdot T$ est la période spatiale de l'onde qui se propage.

Remarques :

– Tout ce que nous avons dit pour la propagation dans un milieu à deux dimensions, la surface de l'eau, peut être étendu à un milieu à trois dimensions.

– Pourquoi choisir l'onde sinusoïdale au cours du temps ?

Ceci tient à ce que ces ondes forment une base de décomposition des autres ondes. Selon l'analyse de Fourier, sous des conditions mathématiques (peu contraignantes pour les signaux que nous rencontrons), toute fonction périodique de fréquence f peut être décrite comme la somme de fonctions sinusoïdales de fréquences $0, f, 2f, 3f$, etc.

C.4. Dispersion d'une onde

Nous n'avons pas examiné l'influence de la fréquence de l'onde sur sa propagation à la surface de l'eau. Les résultats de l'expérience décrite à la figure 8.a. permettent de mettre en évidence que la célérité de l'onde à la surface de l'eau dépend de sa fréquence.

Définition 3

Lorsque la célérité de l'onde dépend de sa fréquence, le milieu est dit dispersif.

Si le milieu est dispersif, un paquet d'ondes¹, c'est à dire un groupe d'ondes de fréquences voisines, décomposable au sens de Fourier en composantes sinusoïdales de fréquences différentes, verra chacune de ses composantes progresser à des vitesses différentes. Le paquet d'ondes va donc perdre sa forme initiale lors de la propagation puisque chaque composante sinusoïdale va progresser à sa propre vitesse.

C.5. Autre représentation de la propagation d'une onde

Il est possible de représenter, en différents points du milieu de propagation, la direction et le sens de propagation de l'onde par des lignes continues, perpendiculaires aux surfaces d'onde successives et orientées dans le sens de propagation.

Ces lignes sont appelées rayons d'onde ou plus simplement rayons.

Dans le cas d'une onde sphérique (voire circulaire), ces rayons sont des demi-droites issues du point source et perpendiculaires aux surfaces d'onde. L'ensemble de ces droites forme un faisceau divergent (fig. 8.b).

Dans le cas d'une onde plane (voire rectiligne), ces rayons sont des droites parallèles entre elles et perpendiculaires aux surfaces d'onde. L'ensemble de ces droites forme un faisceau parallèle (fig. 8.c).

La représentation d'une onde par un faisceau de rayons est un moyen pratique que nous utiliserons avec intérêt dans le cas des ondes lumineuses¹.

1. Voir à ce sujet le paragraphe B.3 du chapitre 3.

Surfaces d'onde sphériques (propagation dans l'espace) ou circulaires (propagation sur une surface). Dans les deux cas la trace de chaque surface est un cercle dans le plan de figure.

Rayons d'onde ou rayons, perpendiculaires aux surfaces d'onde et orientés dans le sens de propagation.



Fig. 8b

Surfaces d'onde planes (propagation dans l'espace) ou rectilignes (propagation sur une surface). Dans les deux cas la trace de chaque surface est une droite dans le plan de figure.

Rayons d'onde ou rayons, perpendiculaires aux surfaces d'onde et orientés dans le sens de propagation.



Fig. 8c

D. Propagation des ondes électromagnétiques : cas de la lumière

Avec quelques précautions, nous pouvons généraliser l'étude du paragraphe précédent à l'étude de la lumière qui peut être considérée comme une onde, à la suite des observations de Grimaldi interprétées par Fresnel, et comme une onde électromagnétique suite aux travaux de Maxwell.

La lumière forme une partie des ondes électromagnétiques, celles qui appartiennent au domaine du visible.

D.1. La propagation de la lumière dans le vide

• Nature de l'onde lumineuse

Contrairement aux ondes mécaniques comme le son ou les rides à la surface de l'eau, la lumière n'a pas besoin de milieu matériel pour se propager : elle se propage aussi dans le vide comme le montre la lumière reçue des étoiles.

1. Nous verrons en deuxième année que les champs magnétique et électrique sont en fait couplés par les équations de Maxwell.

2. Michelson et Morley montrent, à l'aide d'un interféromètre, que la vitesse de la lumière est une constante dans tous les référentiels animés de mouvements rectilignes uniformes.

3. Becquerel découvre expérimentalement que seul le champ électrique a un effet « optique » en 1850. Cette propriété est à la base du procédé Lippmann de photographie en couleur (1891).

4. Une onde sinusoïdale est qualifiée de monochromatique en optique car elle est associée à la notion de couleur. Dans les autres domaines de la physique comme l'électricité, une vibration sinusoïdale sera qualifiée d'harmonique.

5. Nous pouvons imaginer ce qu'est une onde plane dans le vide en nous plaçant loin d'une source supposée ponctuelle. Le rayon de l'onde sphérique atteignant ce point étant très grand, nous pouvons assimiler à un plan la portion de surface sphérique locale. En chaque point de ce plan, la perturbation due à l'onde est la même. L'onde plane correspond à un cas particulier de propagation dans l'espace pour lequel une direction de propagation est privilégiée, ici Oz .

La constante E_m est l'amplitude de la vibration lumineuse : elle a pour unité le volt par mètre (V/m).

Nous devons donc nous interroger sur la nature de la perturbation, c'est à dire trouver ce qui, dans le cas de la lumière, correspond à l'élongation dans le cas des ondes mécaniques.

La théorie de Maxwell indique que le cheminement de toute onde électromagnétique, et donc de la lumière, correspond à la propagation d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui oscillent chacun avec une très grande fréquence, de l'ordre de 100 térahertz (10^{14} Hz).

La perturbation d'un point du milieu de propagation atteint par l'onde lumineuse, de fréquence élevée, est de nature électrique et magnétique.

Cette propriété électrique et magnétique¹ de l'onde lumineuse a été créée par la source.

• Propriétés de l'onde lumineuse

Dans le cas du vide, nous pouvons déduire de la théorie de Maxwell que ces champs électrique et magnétique se déplacent avec la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, où c est la célérité l'onde électromagnétique dans le vide, ϵ_0 et μ_0 des constantes fondamentales de valeur $\epsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m (valeur exacte) et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (valeur exacte).

Ainsi $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s (valeur exacte).

Propriété 1

La célérité de la lumière² dans le vide est :

- indépendante de la fréquence de l'onde lumineuse,
- indépendante du référentiel galiléen d'étude.

Le champ électrique³ \vec{E} est la cause de la plupart des effets de la lumière.

Là encore, l'onde lumineuse réelle est souvent quelconque. Fort heureusement, cette onde peut être décrite comme une superposition d'ondes planes progressives sinusoïdales⁴ (on dit aussi monochromatiques), à l'image de ce que nous a donné l'analyse de Fourier pour décrire un paquet d'ondes mécaniques. Les ondes planes⁵ progressives harmoniques jouent donc un rôle de première importance.

En première lecture nous admettons que le champ électrique associé à une onde lumineuse monochromatique de fréquence ν , se propageant dans le vide selon l'axe Oz , est transversal et peut se mettre sous la forme suivante :

$$E_M(z, t) = E_m \cos \left[2\pi \nu \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

écriture que nous rapprocherons de :

$$u_M(z, t) = u_m \cos \left[2\pi \nu \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

obtenue pour une onde progressive sinusoïdale à la surface de l'eau.

Même si des différences de comportement physique apparaîtront, liées aux natures extrêmement différentes de ces ondes, la lumière n'en demeure pas moins une onde : les notions et définitions d'onde progressive, de surface d'onde, de période spatiale λ et de période temporelle T obtenues pour l'onde mécanique transversale sont transposables au cas de l'onde lumineuse.

Pour une radiation électromagnétique monochromatique considérée dans le vide, nous obtenons la longueur d'onde associée par la relation :

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{\nu}$$

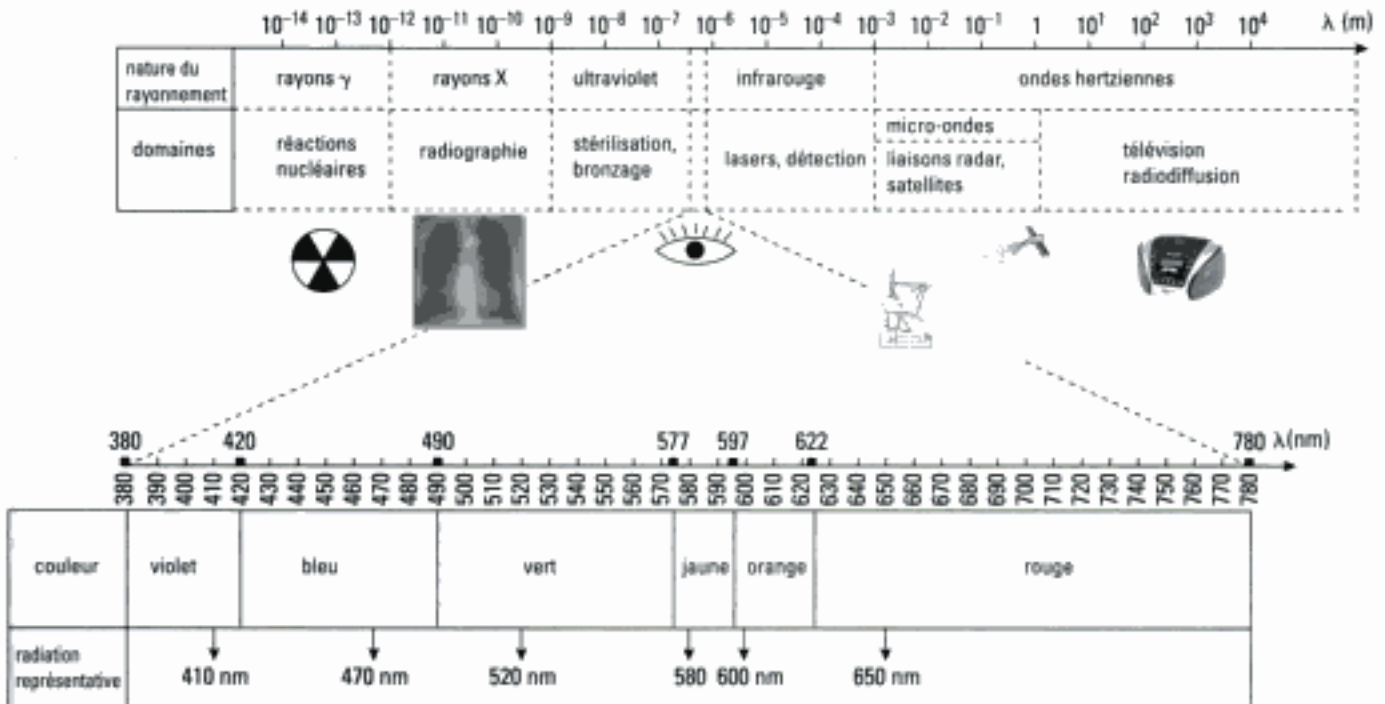


Fig.9 – La place de la lumière dans le spectre électromagnétique

D.2. Mesure de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le verre n'est pas la même dans l'eau ou encore dans l'air. Pour autant, cette vitesse est très grande et nos sens, dans notre environnement proche, ne perçoivent pas la durée qui sépare l'instant de l'émission lumineuse de l'instant de sa réception. Tout nous laisse penser que la lumière se propage de manière instantanée.

La première tentative de mesure de la vitesse de la lumière est due à Galilée, sans résultat probant faute d'instrument de mesure des temps adapté.

En 1676, en observant les occultations du satellite Io de Jupiter¹, le danois Römer remarque que les prédictions de ces occultations subissent une avance de temps quand la distance Terre-Jupiter se réduit, et un retard de temps lorsque cette distance augmente. Il se sert de cette observation pour calculer la valeur de la vitesse de la lumière. Les conclusions de Römer sont que la lumière met onze minutes pour un trajet égal au demi-diamètre de l'orbite terrestre, soit une célérité $c \approx 220\,000$ km/s avec les données connues à l'époque, et un écart relatif² de l'ordre de 30 % par rapport à la valeur de c admise aujourd'hui.

Fizeau, en 1849, par un ingénieux système de mécanique et d'optique utilisant une roue dentée et deux miroirs, puis Foucault, en 1850, utilisant un miroir tournant très rapidement, mesurent une vitesse de la lumière de 300 000 km/s. Les mesures qui suivent sont réalisées sur les ondes électromagnétiques, notamment hertziennes, qui se déplacent dans le vide à la même vitesse que la lumière ; elles donnent alors la valeur $c = 299\,792,0$ km/s.

Rappels :

1 nanomètre (nm) = 10⁻⁹ m

1 térahertz (THz) = 10¹² Hz.

1. Galilée découvre Jupiter en 1610 à l'aide de la lunette qu'il a construite en 1609, de grossissement 9.

2. Cet écart relatif s'explique à l'époque par une mesure de parallaxe solaire à 10 % près et une mesure du retard ou de l'avance, par Römer, à 30 % près.

1. Le Système International d'Unités, d'abréviation SI, est un système d'unités cohérent et rationalisé fondé sur un choix de sept unités de base bien définies et considérées par convention comme indépendantes ; ce sont : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela.

2. Le terme transparent signifie ici que la dispersion du milieu est faible.

3. Le choix de l'onde plane est dicté par deux critères :
– on sait que ce type d'onde est fondamental ;
– en physique on étudie un seul paramètre à la fois.

4. La *biréfringence* est un phénomène de double réfraction. Au travers d'un corps transparent biréfringent, comme le spath d'Islande, on obtient deux images du même objet.

5. En plein jour, l'œil humain est le plus sensible au jaune verdâtre de longueur d'onde 555 nm, valeur qu'il faut bien sûr comparer à la longueur d'onde de 560 nm dans laquelle le soleil émet le plus...

La question de la valeur de la vitesse de la lumière se règle en 1983 quand le Système International d'unités¹ donne la définition du mètre : le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde.

En conséquence, la vitesse de propagation de la lumière dans le vide se trouve fixée exactement à $c = 299\,792\,458$ m/s. C'est une constante fondamentale.

Dans la pratique, on prend $c \approx 3 \times 10^8$ m/s comme valeur approchée de la vitesse de la lumière dans le vide.

D.3. Propagation de la lumière dans les milieux matériels transparents

Nous avons remarqué précédemment que la célérité d'une onde mécanique dépend de la nature du milieu de propagation et de la fréquence de l'onde : il en est de même pour la lumière.

Nos hypothèses sur l'onde lumineuse et le milieu où elle se propage sont les suivantes :

- le milieu est linéaire, homogène, isotrope et transparent², au sens où ces termes ont été définis précédemment ;
- l'onde qui se propage est une onde plane³.

Pour donner corps à ces termes, un bon verre optique est :

- homogène s'il ne contient pas de bulles de gaz emprisonnées ou si son indice optique ne varie pas localement ;
- isotrope s'il n'est pas biréfringent⁴ ;
- transparent s'il n'est pas fortement dispersif.

Concernant la propagation dans un milieu matériel transparent :

- si l'onde est monochromatique, nous redéfinirons ses paramètres, à l'exception de la fréquence ;
- si l'onde est polychromatique on observera le caractère dispersif du milieu.

Comme nous le voyons, les conclusions obtenues pour les ondes mécaniques peuvent être étendues à la lumière se propageant dans les milieux matériels. Dans la suite, selon l'usage, les milieux seront qualifiés de « transparents » pour résumer leurs propriétés précitées.

D.3.1 – Propagation d'une onde lumineuse monochromatique dans un milieu transparent

Pour des questions physiologiques liées à l'œil⁵, les mesures sont souvent réalisées en lumière jaune, celle du doublet du sodium de longueur d'onde moyenne $\lambda_{Na} = 589,3$ nm. C'est ce que nous supposerons dans ce paragraphe.

Suite à l'expérience de Foucault, nous savons que la vitesse de la lumière est plus petite dans l'eau que dans l'air. En utilisant la même expérience, Michelson, en 1888, détermine avec précision le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et de la vitesse de la lumière dans l'eau : il trouve 1,330.

1. On dit indifféremment : indice du milieu de propagation, ou indice de réfraction ou encore indice optique de la substance. Généralement on a : $n \geq 1$.

Définition 4

On appelle indice de réfraction¹ n d'un milieu le rapport de la célérité c d'une onde lumineuse monochromatique dans le vide à sa célérité v dans le milieu considéré. On a donc :

$$n = \frac{c}{v}$$

La longueur d'onde dans un milieu est : $\lambda_{\text{milieu}} = v \times T = \frac{c}{n} \times T = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}$
 puisque $\lambda_{\text{vide}} = c \times T$.

Comme $n > 1$, dans un milieu matériel on a toujours $\lambda_{\text{milieu}} < \lambda_{\text{vide}}$.

Un milieu matériel comprime donc les longueurs d'onde. Pour éviter la profusion des longueurs d'onde, on choisit la longueur d'onde dans le vide comme caractéristique d'une onde.

Pour différents milieux transparents on obtient les indices de réfraction suivants :

Indices de différentes substances pour la radiation jaune du sodium

	Milieu	Indice
Solides	Verre, de type flint ² (moyen), constituant certains prismes utilisés au laboratoire	1,620
	Verre, de type crown ³ , constituant certains prismes utilisés au laboratoire	1,516
	Quartz fondu	1,4584
	Diamant	2,4173
	Chlorure de sodium	1,5442
	Glace	1,309
	Verre à lunette	de 1,5 à 1,9
	Polyméthacrylate de méthyle : plexiglass	1,492
	Polycarbonate : verre organique ⁴	de 1,5 à 1,7
Liquides	Eau à 20°C	1,3330
	Ethanol	1,359
	Disulfure de carbone	1,6277
Gaz	Air sec	1,000293
	Dioxyde de carbone	1,000448
	Eau	1,000249

2. Flint (pour flint-glass) ; ce sont des silicates de potassium et de plomb.

3. Crown (pour crown-glass) ; ce sont silicates de potassium et de calcium.

4. Les « verre » dits organiques en plexiglas ou en polycarbonate remplacent de plus en plus les verres dits minéraux. Pour fabriquer des verres de vue à fortes corrections de myopie, et pour que ces verres ne soient pas trop épais, il faut utiliser une substance transparente d'indice optique élevé. Seul le verre répond encore à ce cahier des charges.

Plus l'indice n est grand, plus la vitesse de la lumière dans le milieu est faible. L'indice de l'air vaut pratiquement 1, ce qui montre que la vitesse de la lumière dans le vide est très proche de celle mesurée dans l'air.

D.3.2 – Dispersion de la lumière

Indice de différentes substances en fonction de la longueur d'onde

indice	n_B	n_J	n_R
couleur	bleue	jaune	rouge
longueur d'onde	486,1 nm	589,3 nm	656,3 nm
fréquence (THz)	617	509	457
milieu			
vide	1	1	1
air sec à 0°C	1,000294	1,000292	1,000291
eau à 20°C	1,3371	1,333	1,3311
Verre de type flint (dense)	1,674	1,661	1,654
Verre de type crown	1,521	1,515	1,513

1. La théorie de Maxwell permet aussi de rendre compte des phénomènes d'absorption et de dispersion dans les milieux matériels linéaires, homogènes et isotropes, en introduisant en chaque point du milieu deux constantes ϵ et μ appelées permittivité diélectrique et perméabilité magnétique du milieu en ce point.

• Les milieux transparents sont dispersifs¹

Nous voyons que l'indice optique n dépend de la fréquence. Or, v est aussi une fonction de la fréquence puisque $n(\nu) = \frac{c}{v}$. On en déduit que :

Définition 5

Un milieu transparent est dit dispersif si la vitesse de l'onde lumineuse dépend de la fréquence de l'onde.

À l'examen du tableau précédent, nous remarquons que l'indice optique augmente lorsque la fréquence de la radiation lumineuse augmente.

Ainsi, dans un même milieu matériel, la célérité de la lumière diminue lorsque la fréquence augmente.

Un paquet d'ondes lumineuses perd sa forme au cours de sa propagation dans un milieu transparent.

Par exemple, une lumière polychromatique voit chacune de ses composantes monochromatiques progresser à sa propre vitesse, et ce d'autant plus que le milieu est plus dispersif. Ceci permet d'expliquer l'arc en ciel où la lumière blanche est dispersée par les gouttes d'eau des nuages. Il en va de même de l'utilisation du spectroscope au laboratoire où le milieu dispersif est le verre constituant le prisme.

• Les milieux transparents sont plus ou moins dispersifs

Nous remarquons dans le tableau précédent que les variations de l'indice de réfraction d'une extrémité à l'autre du spectre, soit du bleu au rouge, sont faibles. Si une précision moyenne suffit dans les mesures, nous pouvons prendre une valeur moyenne de l'indice.

Nous pouvons retenir comme valeur de l'indice d'une substance son indice correspondant à la radiation jaune du sodium.

• Loi de Cauchy

Pour les verres d'optique, dans le visible, Cauchy a établi la relation $n(\lambda)$ suivante :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \text{ ou } A \text{ et } B \text{ sont des constantes positives.}$$

Propriété 2

L'indice d'un verre optique est d'autant plus faible que la longueur d'onde est grande.

• Nombre d'Abbe

Cette question de la dispersion est particulièrement importante pour les verres de vue et les verres utilisés dans les laboratoires. Aussi, un critère numérique est associé à une matière transparente afin de savoir si elle est fortement dispersive ou pas ; c'est le nombre d'Abbe¹ η défini comme suit :

$$\eta = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \text{ où } n_D, n_F \text{ et } n_C \text{ sont les notations conventionnelles des indices}$$

de la substance pour les longueurs d'onde $\lambda_D = \lambda_J = 589,3 \text{ nm}$ pour la radiation jaune, $\lambda_F = \lambda_B = 486,1 \text{ nm}$ pour la radiation bleue, $\lambda_C = \lambda_R = 656,3 \text{ nm}$ pour la radiation rouge.

Nombre d'Abbe de différentes substances

Milieu	Nombre d'Abbe
Verre de type flint	33
Verre de type Crown	64
Verre à lunette indice 1,523	59
Verre à lunette indice 1,8	35
Polycarbonate (verre organique)	32
eau à 20°C	55
air sec à 0°C	97

Définition 6

Le nombre d'Abbe² caractérise le pouvoir dispersif d'une substance : plus ce nombre est élevé, moins le milieu est dispersif.

• Milieux peu dispersifs

On remarque que l'air et l'eau sont des milieux peu dispersifs : nous pouvons donc négliger la dispersion dans ces milieux lorsque la lumière les traverse.

• Milieux fortement dispersifs

La forte dispersion des verres flint fait qu'on les utilise dans le verre cristal qui, de ce fait, a un bel éclat.

Les verres à lunette d'indice élevé et les « verres » de vue en polycarbonate sont fortement dispersifs. C'est, pour l'instant encore, le prix à payer pour permettre des corrections de vue importantes dans un cas, ou pour avoir des verres légers dans l'autre cas.

1. Les qualités d'un verre d'optique ne se limitent pas à son indice et à son nombre d'Abbe. Il faut aussi prendre en compte la densité du verre et son coefficient de dilatation.

2. En ophtalmologie, si le nombre d'Abbe est supérieur à 45, la dispersion est considérée comme faible, s'il est inférieur à 39, la dispersion est forte, entre les deux, elle est considérée comme moyenne.

L'essentiel

✓ La nature de la lumière

- La diffraction de la lumière est une preuve du caractère ondulatoire de la lumière.
- Les ondes lumineuses appartiennent au domaine infiniment plus vaste des ondes électromagnétiques.
- Les ondes électromagnétiques sont formées d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} se propageant simultanément au cours du temps.
- Le champ électrique est la cause de la plupart des effets de la lumière.
- Une lumière monochromatique correspond à une radiation lumineuse d'une seule fréquence.
- La lumière transporte de l'énergie.
- Dans le modèle corpusculaire, les seules énergies possibles d'une onde électromagnétique de fréquence ν sont des multiples entiers du quantum d'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ avec $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

✓ La lumière dans le vide

- La célérité des ondes électromagnétiques est une constante universelle : $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$.
- Une onde lumineuse progressive monochromatique ayant une direction de propagation privilégiée (ou onde plane progressive monochromatique) est :
 - transversale
 - de période temporelle $T = \frac{1}{\nu}$ égale à celle de la source lumineuse
 - de période spatiale, ou longueur d'onde, $\lambda = c \cdot T$
- La célérité de la lumière est indépendante de la fréquence de l'onde.
- Le domaine des radiations visibles par l'œil est compris entre les longueurs d'onde 400 nm et 800 nm, respectivement de fréquence 750 THz à 375 THz.

✓ La lumière dans les milieux matériels transparents

- La fréquence de la radiation est la même que dans le vide et elle est indépendante du milieu de propagation.
- L'onde lumineuse se propage avec une vitesse v plus faible que dans le vide.
- La longueur d'onde s'écrit $\lambda = v \cdot T$
- Pour une radiation monochromatique, l'indice de réfraction du milieu est :

$$n = \frac{c}{v}$$

- $\lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}$. Un milieu matériel comprime les longueurs d'onde.
- L'indice de réfraction de l'air est quasiment égal à 1.
- Dans les milieux dits dispersifs, la vitesse de l'onde dépend de la fréquence de l'onde. L'indice du milieu dépend alors de la longueur d'onde.
- Les verres optiques sont dispersifs et vérifient la loi de Cauchy.
- Le nombre d'Abbe caractérise la dispersion d'une substance.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Diffraction par une ouverture circulaire

Soit la figure de diffraction obtenue à la figure 1. L'onde incidente est plane et l'écran d'observation est placé très loin de l'objet diffractant. Ces conditions expérimentales sont dites de Fraunhofer. La lumière est celle d'un laser de laboratoire d'enseignement dont le faisceau est perpendiculaire à l'écran. L'ouverture circulaire, de diamètre 1 mm, est placée à une distance $D = 6$ m de l'écran, mesurée à 1 cm près. On prendra $n = 1,000$ pour l'indice de l'air et une valeur approchée pour la vitesse de la lumière dans le vide.

a) Quelles prévisions peut-on faire concernant la dimension de la tache sur l'écran en utilisant le modèle du rayon lumineux d'Euclide ?

b) La théorie ondulatoire nous indique que la tache centrale de diffraction, appelée tache d'Airy, d'une grande importance en optique, est entourée d'un anneau sombre dont le rayon angulaire θ , vu depuis l'ouverture circulaire diffractante, est donné par la relation $\sin(\theta) = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$, où R est le rayon de cette ouverture. Avec un instrument sensible au centième de millimètre, on mesure le diamètre de ce premier anneau et on trouve : $d = 2r = 9$ mm. Quelle est la longueur d'onde λ_1 de la lumière émise par le laser, sa couleur et sa fréquence ?

c) Calculer le diamètre d_2 de la tache centrale de diffraction donnée par une monture circulaire de diamètre 40 mm, éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda_2 = 589,3$ nm, si l'on observe cette tache à 20 cm de la lentille.

d) Le critère de Rayleigh indique que deux points objets donnés ne peuvent être séparés par un instrument que si les deux figures d'Airy images sont elles mêmes au moins séparées par le rayon de la tache d'Airy. Donner l'écart angulaire correspondant à ce critère et interpréter le fait qu'en microscopie on colore en bleu les préparations.

Ex. 2 Loi de Cauchy

a) Pour un verre de type crown, calculer les coefficients A et B de la loi de Cauchy en utilisant les résultats du tableau 11 pour les radiations de couleurs bleue et rouge.

b) En déduire l'indice de ce verre pour la radiation de couleur jaune et le comparer à la valeur du tableau.

c) Ce verre est traversé par un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm. Calculer la vitesse de cette lumière dans le verre crown.

Ex. 3 Nombre d'Abbe

Dans le cours, il est écrit : « Plus ce nombre (d'Abbe) est élevé, moins le milieu est dispersif. » Justifier cette conclusion.

Ex. 4 O.C.M.

Une onde progressive plane monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m, se propage dans le vide. À tout instant t , son vecteur champ électrique \vec{E} au point $P(x, y, z)$ a pour composantes cartésiennes :

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0 \cos \left[\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right]$$

L'amplitude E_0 vaut 10^{-4} V/m. k et ω sont deux scalaires réels positifs et c désigne la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 300\,000$ km \cdot s $^{-1}$).

a) La fréquence N de l'onde est :

1. $N = 10^{21}$ Hz
2. $N = 3 \cdot 10^{17}$ Hz
3. $N = 5 \cdot 10^{14}$ Hz
4. $N = 2 \cdot 10^7$ Hz

b) Cette fréquence appartient-elle au domaine :

1. des fréquences industrielles ?
2. des fréquences radioélectriques ?
3. des fréquences optiques
4. des fréquences du rayonnement gamma ?

c) L'équation cartésienne des plans d'onde est :

1. $2x + 2y + z = \text{cte}$
2. $x + y = \text{cte}$
3. $z = \text{cte}$
4. $x + y + 2z = \text{cte}$

Enac 2000

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) Dimension de la tache sur l'écran dans le modèle d'Euclide.

Dans ce modèle, la lumière se propage en ligne droite le long de rayons lumineux. L'ouverture étant éclairée en lumière parallèle (onde plane), les rayons sont parallèles entre eux. La tache aurait donc le diamètre de l'ouverture circulaire, c'est-à-dire 1 mm.

b) • Longueur d'onde de la lumière émise par le laser :

On a $\tan(\theta) = \frac{r}{D}$ avec $r \ll D$ donc $\tan(\theta) = \frac{r}{D} \approx \theta$ et $\sin(\theta) = 1,22 \frac{\lambda}{2R} \approx \theta$ ce qui permet

d'écrire : $\frac{r}{D} = 1,22 \frac{\lambda}{2R} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2rR}{1,22D}$ (1)

A.N. $\lambda = \frac{2 \times 4,5 \cdot 10^{-3} \times 0,5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \times 6} = 6,14 \cdot 10^{-7} \text{ m.} \quad \lambda = 614 \text{ nm.}$

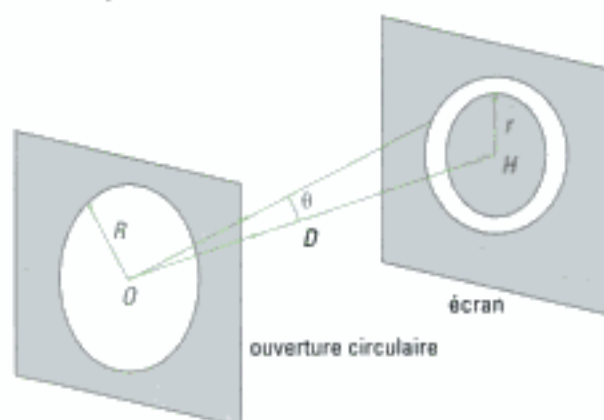


Figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire. Les deux premiers anneaux sombres sont représentés. Les échelles ne sont pas respectées.

⚠ Il s'agit de la longueur d'onde dans l'air.

Comme la fréquence de cette radiation est la même dans le vide et dans l'air, on a aussi :

$\nu = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{v}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{c\lambda}{v} = n\lambda$, puisque $n = \frac{c}{v}$. Or ici $n = 1$, donc $\lambda_1 = \lambda$.

• Couleur associée à cette lumière : dans le spectre électromagnétique, cette longueur d'onde correspond à celle associée à la couleur orange.

• Fréquence de la radiation associée à cette lumière : la fréquence de la radiation est :

$$\nu = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{6,14 \cdot 10^{-7}} = 4,88 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

c) Calcul du diamètre de la tache de diffraction

La relation (1) donne :

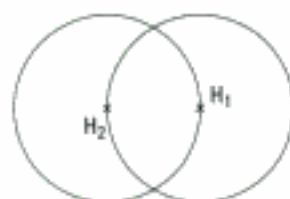
$$d_2 = 2 \times r_2 = \frac{2 \times 1,22 \times \lambda_2 \times D_2}{2R_2} = \frac{1,22 \times 589 \cdot 10^{-9} \times 0,2}{2 \cdot 10^{-2}} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 7 \mu\text{m.}$$

💡 On constate que la tache de diffraction a une petite dimension en regard de la dimension des images que l'on obtient habituellement dans les instruments d'optique (par exemple, un négatif photographique a la dimension 24 mm × 36 mm). Dans ces cas, l'influence de la diffraction pourra donc être négligée.

d) Critère de Rayleigh.

Sur l'écran, les centres H_1 et H_2 des deux taches de diffraction représentées ci-contre sont au moins distants du rayon angulaire θ_s du premier anneau qui est donné par :

$$\theta_s = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$$



On peut colorer en bleu (bleu de méthylène) les préparations de microscopie car la longueur d'onde est alors l'une des plus courtes du spectre électromagnétique. θ_s correspondant à la radiation bleue est ainsi l'angle le plus petit que l'on puisse obtenir. Les points images étant moins espacés, le pouvoir séparateur de l'instrument est augmenté en lumière bleue. On utilise aussi aujourd'hui la lumière bleue d'un laser ($\lambda = 473 \text{ nm}$).

Exercice 2

a) Calcul des coefficients A et B :

La loi de Cauchy nous indique que : $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$.



Comme nous avons deux inconnues, A et B , cherchons deux équations indépendantes.

D'après l'énoncé et le tableau 11, on peut écrire : $n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2}$ et $n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}$.

Ce qui donne :

$$B = \frac{n_2 - n_1}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}} \quad \text{et} \quad A = n_1 - \frac{B}{\lambda_1^2}$$

soit avec les valeurs du tableau : $B = 4,188 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$ et $A = 1,503$.

b) Indice du verre pour la radiation de couleur jaune :

La loi de Cauchy pour ce verre crown s'écrit : $n = 1,503 + \frac{4,188 \cdot 10^{-15}}{\lambda^2}$.

Pour la radiation jaune, son indice sera : $n_j = 1,503 + \frac{4,188 \cdot 10^{-15}}{(589,3 \cdot 10^{-9})^2} = 1,515$, ce qui correspond à la valeur du tableau.

c) Vitesse de la lumière du laser dans le verre crown :

$$\text{On a : } v = \frac{c}{n_{\text{las}}} = \frac{c}{A + \frac{B}{\lambda_{\text{las}}^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,503 + \frac{4,188 \cdot 10^{-15}}{(632,8 \cdot 10^{-9})^2}} = 1,982 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$



La vitesse de la lumière calculée dans le verre crown représente 66 % de la vitesse de la lumière dans le vide,

ce que l'on retrouve par : $\frac{v}{c} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} = 0,66 = 66 \%$.

Exercice 3

Avec les notations du cours, le nombre d'Abbe est défini par $\eta = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$.

L'indice des substances envisagées croît lorsque la longueur d'onde décroît, et ce d'autant plus vite que le milieu est dispersif. Moins le milieu sera dispersif, plus l'écart entre n_F et n_C , soit $n_F - n_C$ sera petit et donc plus le nombre d'Abbe sera grand.

Exercice 4

a) **Réponse 3** car $\lambda = cT = \frac{c}{N} \Rightarrow N = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14}$ Hz.

b) **Réponse 3** car la longueur d'onde $\lambda = 600$ nm appartient au domaine du visible (380 nm ; 780 nm)

c) **Réponse 1** car la phase doit être constante quelque soit t ;

donc $\frac{k}{3}(2x + 2y + z) = \text{cte}_1 \Rightarrow 2x + 2y + z = \text{cte}_2$.

Lois et principes de l'optique géométrique

Introduction

Après avoir abordé la lumière comme une onde, et mis en évidence les propriétés de l'onde lumineuse en montrant l'importance de la notion de surface d'onde et de rayon d'onde, nous nous proposons dans ce chapitre d'aborder l'optique géométrique comme approximation du modèle électromagnétique de la lumière. Nous préciserons le cadre du modèle géométrique et la notion de rayon lumineux nous permettra d'énoncer les lois de l'optique géométrique, notamment les lois de la réflexion et de la réfraction de Snell-Descartes dont les applications sont nombreuses.

Plan du chapitre 2

A. Le rayon lumineux de l'optique géométrique	28
B. Lois de l'optique géométrique	29
1. Les principes de l'optique géométrique	29
2. Lois de Snell-Descartes	30
3. Loi de Kepler	35
C. Applications	36
1. Formation des images	36
2. Guidage de la lumière	36
3. Propagation dans un milieu stratifié	36
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	44
Énoncés des exercices	49
Solution des exercices	53

A. Le rayon lumineux de l'optique géométrique

1. Nous utilisons ici implicitement le résultat établi selon lequel plus la dimension de l'objet se rapproche de la longueur d'onde λ de la lumière incidente, plus la diffraction est importante.

2. On pourrait penser que les dimensions des ouvertures sont choisies pour que les conditions de l'optique géométrique soient vérifiées. C'est partiellement vrai. Cependant, il ne faut pas oublier que la réalisation d'ouvertures de petit diamètre est difficile car les bords doivent être nets. Ainsi, la limite de 0,5 mm comme diamètre d'ouverture demande déjà une grande habileté technique pour être atteinte.

L'approche physique montre (se reporter à l'annexe 1) que l'optique géométrique est une approximation de l'optique ondulatoire si la longueur d'onde λ de la lumière est petite devant les dimensions caractéristiques d_c rencontrées dans le système¹ : $\lambda \ll d_c$ ou $\frac{d_c}{\lambda} \gg 1$.

Dans ce cas, on peut utiliser la notion de rayon lumineux de direction orthogonale aux surfaces d'onde.

Considérons un faisceau cylindrique usuel de petites dimensions et déterminons s'il relève de l'optique géométrique.

Dans sa formation, ce faisceau est limité par une ouverture (diaphragme), généralement circulaire, de diamètre D .

D'un point de vue pratique, quels sont les diamètres des ouvertures les plus petites couramment utilisées, qui vont constituer la dimension caractéristique du système optique ?

Pour le diaphragme d'un appareil photographique : 1 mm.

Pour le diaphragme de sortie de la lumière laser au laboratoire : 0,5 mm².

Si nous prenons le cas d'une lumière rouge de longueur d'onde $\lambda = 780$ nm, parmi les plus grandes longueurs d'onde visibles, nous obtenons le plus petit rapport $\frac{D}{\lambda}$ courant : $\frac{D}{\lambda} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{780 \cdot 10^{-9}} = 640$. Ce rapport $\frac{D}{\lambda}$ est donc très supérieur à 1.

Dans des conditions choisies comme défavorables (petite ouverture, grande longueur d'onde), les conditions de validité de l'optique géométrique sont encore vérifiées.

Le faisceau lumineux issu des petites ouvertures usuelles relève de l'optique géométrique. Dans ce cas, nous pouvons utiliser le modèle du rayon lumineux

Ceci donne au rayon lumineux une réalité physique que nous utiliserons maintenant systématiquement, par exemple pour comprendre la formation des images dans l'appareil photographique (fig. 1). Les rayons tracés, bien qu'étant des rayons physiques, sont des droites mathématiques en raison des rapports d'échelle entre le diamètre D du diaphragme et la longueur d'onde de la lumière ($\frac{D}{\lambda} \gg 1$).

Dans l'appareil photographique réflexe, dont une vue schématique en coupe est donnée ci-contre, l'objectif modélisé ici par une lentille convergente donne une image nette d'un objet à l'infini sur le plan de la pellicule. Un diaphragme réglable placé derrière la lentille limite la quantité de lumière qui entre dans l'appareil. Le miroir incliné dévie le faisceau vers un pentaprisme puis vers un viseur et enfin vers l'œil. L'obturateur ne laisse arriver la lumière à la pellicule que pendant une faible durée quand l'utilisateur appuie sur le déclencheur. A cet instant, le miroir mobile tourne autour de l'axe Δ perpendiculaire au plan de figure pour que la lumière se dirige vers la pellicule.

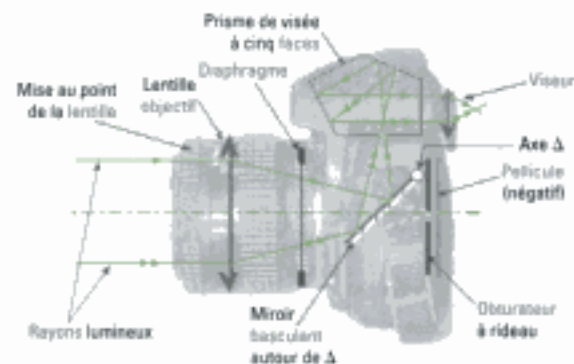


Fig. 1 – Appareil photo réflexe.

Nous comprenons fort bien maintenant que le modèle du rayon lumineux ait été découvert et utilisé par Euclide il y a... 2300 ans. Ceci est dû à ce qu'il vivait, sans qu'il le sache, dans un monde où la lumière a une longueur d'onde très supérieure à la dimension des objets qu'elle rencontre. C'est toujours vrai ! Il fallait la curiosité de Grimaldi pour regarder l'ombre d'un cheveu éclairé par un mince filet lumineux issu du soleil...et découvrir la diffraction, qui nous montre que la lumière est une onde, dont l'approximation est l'optique géométrique.

B. Lois de l'optique géométrique

Ces lois ou principes très anciens sont fondés sur des observations courantes simples, comme la formation des ombres portées courantes ou encore celles des éclipses de soleil.

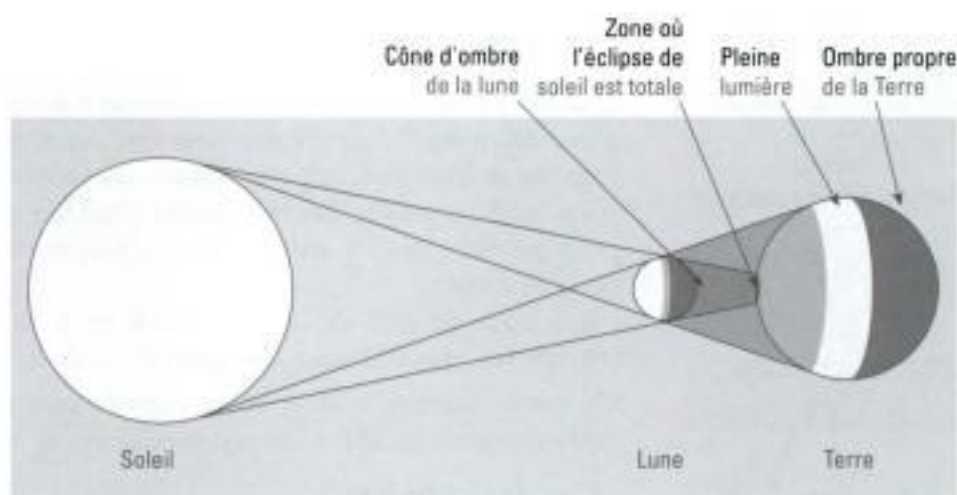


Fig. 2 – L'éclipse de soleil met en évidence la propriété qu'a la lumière de se propager en ligne droite dans un milieu homogène

1. Ce principe va à l'encontre de la nature corpusculaire de la lumière. Ainsi, au CERN, dans la machine LEP (Large Electron-Positron collider) on étudie les collisions entre photons. Cependant, les énergies mises en jeu sont sans commune mesure avec celles de l'optique géométrique.

Attention : un rayon lumineux ne représente pas la trajectoire des photons car ils sont non localisables et n'ont pas de trajectoire au sens classique.

2. On distingue les faisceaux de forme cylindrique (fig. 3a) et les faisceaux coniques (divergent en fig. 3b ou convergent en fig. 3c). α est l'angle d'ouverture du faisceau conique.

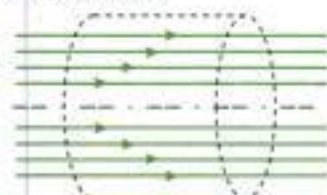


Fig. 3a
Faisceau cylindrique

B.1. Les principes de l'optique géométrique

Propriété 1

Principe d'indépendance des rayons lumineux

Lorsque deux rayons lumineux se rencontrent, ils n'interagissent pas¹ : un rayon lumineux ne peut être dévié par un autre rayon lumineux.

Propriété 2

Principe de propagation rectiligne de la lumière

Dans un milieu transparent et homogène la lumière se propage en ligne droite.

En pratique, vu les dimensions des objets qui utilisent la lumière (verre de lunette, paire de jumelles, miroirs...), un grand nombre de rayons arrivent ou partent de ces objets. Nous considérons donc **un ensemble de rayons lumineux appelé un faisceau lumineux**².

L'application des principes d'indépendance et de propagation rectiligne nous permettent de conclure que dans un milieu homogène chacun des rayons du faisceau se propage en ligne droite, indépendamment des autres.

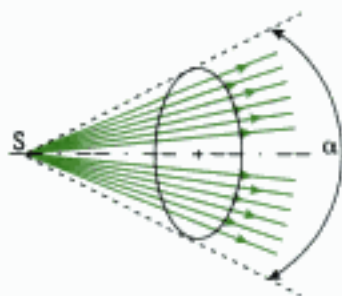


Fig. 3b
Faisceau conique divergent
d'ouverture α

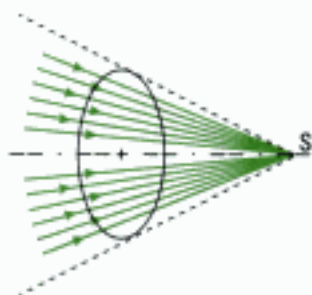


Fig. 3c
Faisceau conique convergent

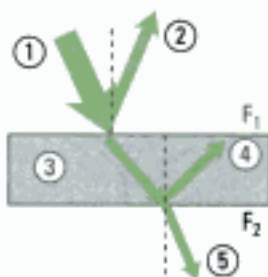


Fig. 4

Réflexion et transmission du son à la rencontre d'une cloison.

Type d'onde :

- ① incidente sur la frontière F1 ;
- ② réfléchi sur F1 ; ③ transmise par F1 ;
- ④ réfléchi par la frontière F2 ; ⑤ transmise par F2.

1. Le dépôt métallique absorbe une petite partie de la lumière. Un miroir de salle de bains ne répond pas à cette définition car le dépôt métallique, fragile, est protégé par un support en verre. Il y a donc successivement réfraction air-verre, réflexion sur le miroir et réfraction verre-air, et non pas une simple réflexion sur la surface métallique.

Propriété 3

Principe du retour inverse de la lumière

Dans un milieu transparent, isotrope, homogène ou non homogène, le trajet suivi par la lumière entre deux points situés sur un même rayon lumineux est indépendant du sens de propagation de la lumière entre ces deux points.

Ainsi, sur la simulation représentée en figure 17, la lumière supposée venir de la gauche du dessin progresse de A vers B, puis vers C.

Si la lumière arrive en C, depuis la droite du dessin (c'est la nouvelle condition initiale), elle suivra le même chemin au retour qu'à l'aller en passant cette fois par C, B et A, comme l'indique le principe du retour inverse de la lumière.

B.2. Lois de Snell-Descartes

B.2.1 – Réflexion et transmission

• Cas des ondes

Les milieux dans lesquels se déplace une onde ne sont pas de dimensions infinies. Cette onde rencontre tôt ou tard un autre milieu par l'intermédiaire d'une frontière. L'expérience courante nous montre (fig. 4) que l'onde arrivant sur la frontière, appelée **onde incidente**, donne naissance à :

- une onde renvoyée par la frontière, appelée **onde réfléchi** ; cette onde se propage donc dans le même milieu que l'onde incidente, mais elle s'éloigne de la frontière ;
- une onde au delà de la frontière, dans le deuxième milieu, appelée **onde transmise**, qui s'éloigne elle aussi de la frontière.

Ce vocabulaire se traduit en termes de rayons associés à l'onde ; on parle donc de rayon incident, de rayon réfléchi, de rayon transmis (ou réfracté).

• Cas de la lumière

- le rayon transmis est appelé **rayon réfracté** (fig. 5) ;
- la frontière s'appelle un **dioptr**e ou un **miroir**.

Définition 1

On appelle dioptr e la surface de séparation de deux milieux transparents, à travers laquelle la lumière peut se réfracter et se réfléchir.

Ce dioptr e, généralement de forme quelconque, est le plus souvent de forme plane (comme les vitres) ou sphérique (comme les lentilles).

Définition 2

On appelle miroir une surface formée d'un dépôt métallique (couramment en argent ou en aluminium) déposé sur un support qui n'est pas lui-même traversé par la lumière¹.

Remarque : les surfaces des dioptr es et des miroirs doivent présenter le « poli optique » pour que les images données par ces systèmes soient de bonne qualité. Le critère de Rayleigh fixe à $\frac{\lambda}{4}$ l'écart maximum entre la surface d'onde

idéale et la surface d'onde perturbée par les défauts de surface. Il faut donc polir les surfaces jusqu'à obtenir des défauts de surface de l'ordre de $\frac{380 \text{ nm}}{4} = 95 \text{ nm}$! En pratique, on ne sait polir à ce degré que les surfaces

planes et sphériques. C'est pourquoi, les dioptr es et les miroirs de l'optique seront généralement plans ou sphériques.

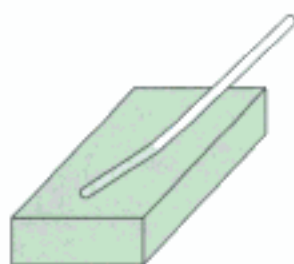


Fig. 5

Un bâton droit trempé dans l'eau semble brisé. Ceci est dû à la réfraction (mot qui vient du latin « refringere » signifiant « briser »).

Nous étudions la réflexion et la transmission de la lumière arrivant verticalement sur la surface de la cuve à ondes, à un instant donné. Le milieu est donc supposé figé sous la forme de la vague représentée. Dans la pratique, c'est l'immobilité stroboscopique qui nous donne cette condition.

Pour illustrer l'aspect expérimental des lois de Snell-Descartes, nous prenons maintenant comme exemple celui de la réflexion-réfraction à la surface du dioptre air-eau de la surface de la cuve à ondes (cf. chapitre 1, fig. 7), représenté en figure 6.

Définition 3

On appelle :

- point d'incidence I , le point de contact du rayon incident avec le dioptre.
- Normale au dioptre, la perpendiculaire menée à une petite surface dS appartenant au dioptre au voisinage du point d'incidence.
- Plan d'incidence π_i , le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence.
- Angle d'incidence i , l'angle entre le rayon incident et la normale au dioptre.

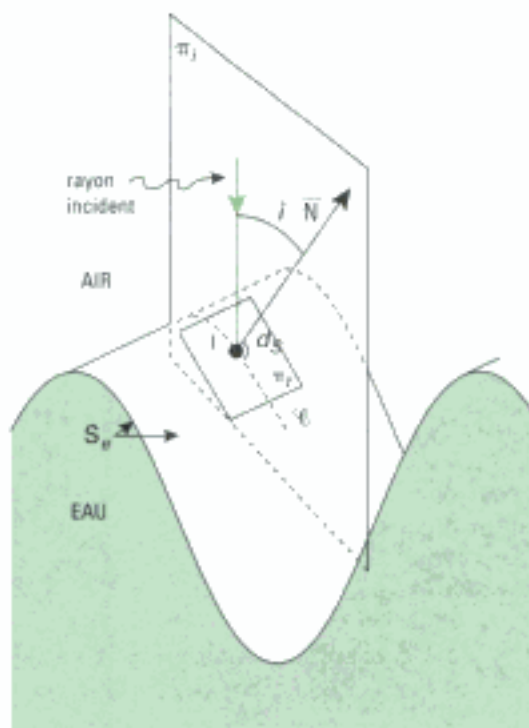


Fig. 6

Détermination du plan d'incidence π_i correspondant à un rayon incident sur le dioptre air-eau de la cuve à ondes.

Sur la figure 6, nous identifions :

le dioptre S_0 , surface de séparation de l'air et de l'eau ; le rayon incident sur la surface du dioptre ; le point d'incidence I ; l'élément de surface dS qui appartient à la surface S_0 du dioptre et qui entoure I ; la normale \vec{N} à dS au point I ; le plan d'incidence π_i ; l'angle d'incidence i .

Remarque : la courbe \mathcal{C} est la trace de l'intersection entre le plan d'incidence π_i et la surface S_0 du dioptre air-eau.

1. Dans le cas de la réflexion au passage entre l'air et l'eau, le pouvoir réflecteur augmente avec l'angle :

$i(^{\circ})$	0	47	89
R(%)	2	6	92
T(%)	98	94	8

Avec R et T les coefficients de réflexion et transmission en énergie.

B.2.2 – Lois de la réflexion dioptrique¹ et métallique

Les lois d'origine expérimentale qui régissent la direction relative des ondes avant et après la frontière sont les lois de Snell-Descartes (fig. 8) qui ont historiquement été énoncées pour la lumière mais qui sont des lois générales aux ondes acoustiques, électromagnétiques...

Considérons deux milieux séparés par un dioptré ou un miroir et énonçons les lois de la réflexion dioptrique ou métallique pour un rayon incident en I :

Première loi

Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.

Deuxième loi

L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence $i'_1 = i_1$.

1. Nous choisissons ici de ne pas orienter les angles dans le plan. Si tel est le cas, la deuxième loi de la réflexion devient : $i'_1 = -i_1$.

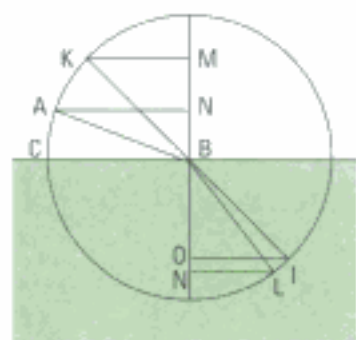


Fig. 7

Figure extraite du traité de Descartes illustrant la réfraction de la lumière dans l'eau (trajet ABL).

En raisonnant comme si la lumière était composée de « balles », Descartes obtient la loi de la réfraction mais conclut que la lumière va plus vite dans l'eau que dans l'air. Fresnel montrera expérimentalement en 1850 que cette proposition est fautive. Aujourd'hui, nous pouvons écrire :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}, \text{ puisque } n = \frac{c}{v}.$$

Attention : les angles sont toujours mesurés à partir de la normale au dioptré en I .

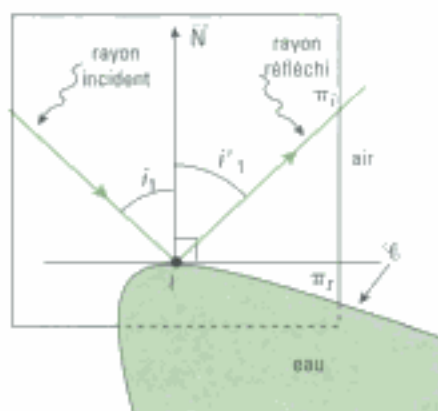


Fig. 8 – Réflexion sur un dioptré air-eau.

B.2.3 – Lois de la réfraction

Première loi

Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.

Deuxième loi

L'angle d'incidence et l'angle de réfraction vérifient la relation : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ où n_1 et n_2 sont les indices optiques des milieux 1 et 2.



Fig. 9 – Transmission pour un dioptré air-eau.

La figure 10 résume la réflexion et la réfraction en I selon les lois de Snell-Descartes.

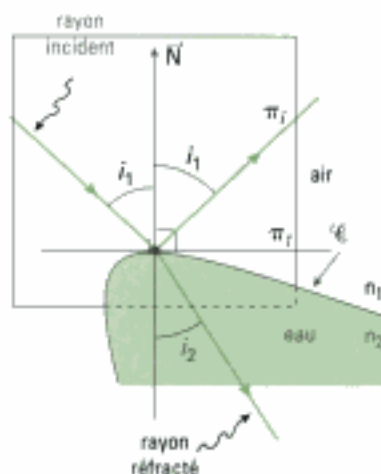


Fig. 10 – Réflexion et transmission pour un dioptré air-eau.

Application 1

Dans la situation précédente (fig. 10), l'angle d'incidence vaut 47° . Quel est l'angle de réfraction ?

Solution

La relation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ nous donne $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ soit $i_2 = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \right)$.

A.N : $i_2 = \text{Arc sin} \left(\frac{1}{1,33} \sin 47^\circ \right) = 33^\circ$.

L'angle de réfraction vaut donc 33° .

Définition 4

Un milieu d'indice n_1 est dit plus réfringent qu'un milieu d'indice n_2 si $n_1 > n_2$.

Propriété 4

Lorsque la lumière passe d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent, le rayon se rapproche de la normale dans le second milieu.

Propriété 5

Lorsque la lumière passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent, le rayon s'écarte de la normale dans le second milieu.

Exemple :

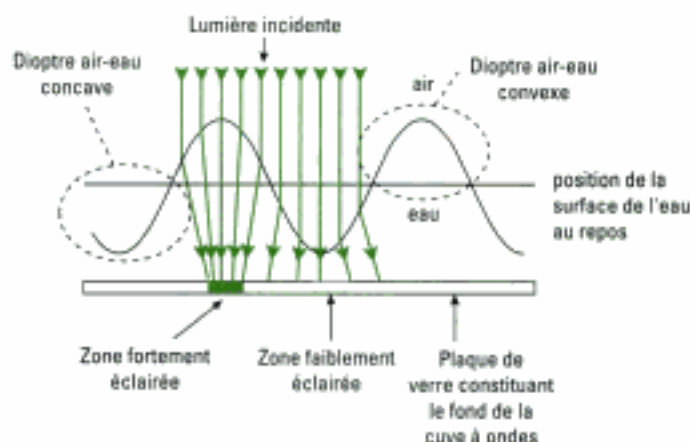


Fig. 11 – Trajet des rayons lumineux dans l'eau de la cuve à ondes.

Les relations $n_2 > n_1$ et $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (avec i_1 et i_2 toujours compris entre 0° et 90°) entraînent $i_2 < i_1$.

Les zones fortement éclairées sur le fond de la cuve montrent la position des crêtes de l'onde ; celles faiblement éclairées montrent la position du creux de l'onde.

Nous retrouverons ces propriétés de convergence ou de divergence de la lumière pour les dioptrés dans le chapitre 5 concernant les lentilles minces.

Pour les dioptrés en forme de crête et pour ceux en forme de creux, les rayons se rapprochent de la normale au passage dans l'eau. Cependant, les normales dans le milieu « eau » convergent dans le cas d'un dioptré convexe et divergent dans le cas d'un dioptré concave. Ceci fait que la lumière se concentre au dessous d'une crête et se « dilue » au dessous d'un creux (fig. 11). C'est ce qui explique que les crêtes de l'onde se verront en clair sur le dépoli de la face avant de la cuve à onde, après projection par le miroir (fig. 2, chap. 1).

Remarquons que si l'angle d'incidence est nul, le rayon n'est pas dévié (ainsi $i_1 = 0$ entraîne $i_2 = 0$).

B.2.4 – Angle de réfraction limite – réflexion totale

Considérons deux milieux d'indice n_1 et n_2 , séparés par une surface dioptrique quelconque (fig. 12) ; un rayon lumineux aborde le dioptré au point d'incidence I . En ce point nous devons tracer :

- le rayon incident ;
- le point d'incidence ;
- le plan tangent π_t au dioptré ;
- la normale au point d'incidence ;

Le plus simple est de placer le plan d'incidence dans le plan de la feuille, puisque tous les rayons s'y trouvent selon les lois de Snell-Descartes. De la sorte, le plan π_t tangent au dioptré est toujours placé perpendiculairement à la feuille. Nous obtenons donc au point d'incidence I la situation ci-contre (fig. 12).

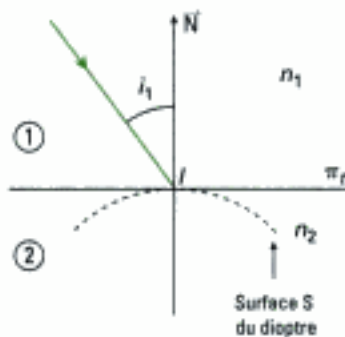


Fig. 12

1. Car $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ et que la fonction $x \mapsto \sin x$ est strictement croissante pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Dans l'écriture $41,8^\circ$, il faut lire 41 degrés et 0,8 degré décimaux, ce qui se traduit par 41° et $0,8 \times 60 = 48$ minutes d'angle. On a donc : $41,8^\circ = 41^\circ 48'$

B.2.4.1 – Angle de réfraction limite en un point d'incidence

Ce cas correspond au passage d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 avec $n_1 < n_2$ (cas du passage air-eau) ; pour traduire l'inégalité des indices on dit aussi que le second milieu est plus réfringent que le premier milieu.

Si $n_2 > n_1$, alors $i_2 < i_1$.

Lorsque i_1 atteint la valeur maximale de 90° , i_2 atteint la valeur limite i_{2lim} telle que : $n_1 \sin(90^\circ) = n_2 \sin(i_{2lim})$ soit encore : $\sin(i_{2lim}) = \frac{n_1}{n_2}$, que nous pouvons encore écrire :

$$i_{2lim} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)$$

Exemple : cas du passage de la lumière de l'air dans le verre crown :

$$i_{2lim} = \text{Arc sin} \left(\frac{1}{1,50} \right) \approx 41,8^\circ \text{ soit environ } 42^\circ.$$

Il existe donc une zone de l'espace située dans le verre qui ne peut jamais être atteinte par la lumière arrivant en I . La région du verre qui peut être atteinte est constituée d'un cône d'angle au sommet en I égal à :

$$i_{2lim} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \text{ (fig. 13).}$$

B.2.4.2 – Réflexion totale en un point d'incidence

Ce cas correspond au passage d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 avec $n_1 > n_2$ (cas du passage eau-air). Plutôt que de refaire toute l'étude, uti-

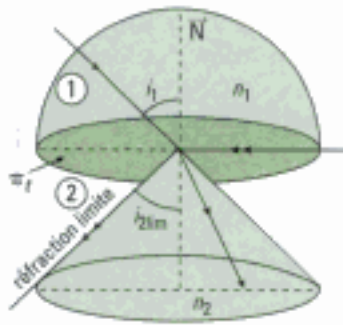


Fig. 13

Cône de réfraction en I.

1. L'angle i_{lim} est bien sûr celui que l'on a nommé i_{lim} dans l'étude précédente.

2. Dans le cas de la réflexion entre le verre et l'air, le pouvoir réflecteur augmente aussi avec l'angle :

$i(^{\circ})$	0	40	41,7
R(%)	4	39	79
T(%)	96	61	21

Avec R et T les coefficients de réflexion et transmission en énergie.

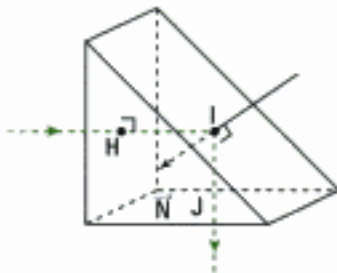


Fig. 14

Prisme en verre crown : l'angle limite de réfraction est égal à 42° . En I l'angle d'incidence est de 45° ; il y a donc réflexion totale en I. Ceci permet de changer la direction de parcours de la lumière par exemple dans les jumelles.

3. L'écart entre la valeur exacte de la fonction $\sin i$ et son approximation à i (mesuré en radian) est d'environ 0,5% pour un angle de 10° et de 1% pour un angle de 15° .

lisons le principe du retour inverse de la lumière. Cela revient, dans le cas du paragraphe 2.4.1. à inverser le sens de la lumière et à permuter les indices 1 et 2.

Tous les rayons incidents à l'intérieur du cône de réfraction en I (fig. 13) sont réfractés dans le second milieu.

Lorsque $i_1 = i_{lim} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$ on a : $i_2 = 90^{\circ}$. L'angle i_2 est à son maximum.

Cependant, dans le milieu ① nous pouvons avoir des angles d'incidence plus grands que la valeur de i_{lim} . Qu'arrive-t-il à ces rayons ?

S'ils sont transmis, ils doivent vérifier la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \text{ soit aussi } \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1.$$

Supposons que $i_1 > i_{lim}$ ce qui donne aussi $\sin i_1 > \sin i_{lim}$ et donc :

$$\sin i_2 > \frac{n_1}{n_2} \sin (i_{lim}).$$

Comme $\sin (i_{lim}) = \sin \left[\text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \right] = \frac{n_2}{n_1}$ nous avons $\sin i_2 > \frac{n_1}{n_2} \times \frac{n_2}{n_1}$;

c'est-à-dire $\sin i_2 > 1$, ce qui est impossible.

Ainsi, les rayons tels que $i_1 > i_{lim}$ ne peuvent être transmis dans le milieu ②.

Les rayons sont totalement réfléchis dans le milieu ① ; on dit qu'il y a **réflexion totale**.

Dans les faits, lorsque l'angle d'incidence augmente depuis 0° jusqu'à i_{lim} , le pouvoir réflecteur augmente² pour atteindre 100 % lorsque $i_1 = i_{lim}$.

Remarque : nous avons vu au paragraphe B. 2.4.1. que l'angle limite pour le passage air-verre a pour valeur 42° dans le cas du dioptre air-verre. Nous prévoyons donc que la lumière subira la réflexion totale si elle arrive depuis le verre avec un angle d'incidence sur le dioptre verre-air supérieur à 42° . C'est le cas dans les prismes dits à réflexion totale (fig. 14).

B.3. Loi de Képler

Les instruments d'optique sont utilisés et perfectionnés bien avant que les lois de Snell-Descartes ne soient découvertes. Des mesures d'angles de réfraction sont effectuées pour les dioptries séparant l'air, l'eau ou le verre. Des tables circulent, comme celles de Witelo (1230-1300), dont Képler se sert pour expliquer le trajet des rayons lumineux dans les lunettes composées de lentilles. Il énonce le premier une relation concernant les angles d'incidence et de réfraction, connue sous le nom de loi de Képler (1611).

Propriété 5

Le rapport des angles d'incidence et de réfraction est constant pour un changement de milieu donné, ce qui s'écrit $\frac{i_1}{i_2} = \text{cte.}$

En fait cette loi n'est vraie que pour les petits angles d'incidence ou de réfraction, ceux pour lesquels $\sin i_1 = i_1$ et $\sin i_2 = i_2$.

1. Cette opération est fondamentale en optique géométrique comme nous le verrons dans le chapitre 3.

La loi de Képler est donc un cas particulier de la loi de Snell-Descartes pour les petits angles : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ devient $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$ et on peut alors considérer que : $\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$. Nous avons linéarisé la loi de Snell-Descartes¹.

C. Applications

C.1. Formation des images

La notion de rayon lumineux et les lois de Snell-Descartes permettent de comprendre et de prévoir la formation des images, ce qui permet la mise au point d'optiques de plus en plus sophistiquées. La formation des images fera l'objet du chapitre 3.

C.2. Guidage de la lumière

Les notions d'angle de réfraction limite et de réflexion totale sont abondamment utilisées pour canaliser la lumière :

- à des fins esthétiques, dans les fontaines lumineuses et dans les lampes décoratives ;
- en médecine dans l'endoscopie qui permet de détecter les corps non détectables avec les rayons X ;
- dans les communications avec les fibres optiques à saut d'indice où le signal sonore ou lumineux à transporter est codé grâce à la lumière d'un laser émettant dans le proche infrarouge, puis transmis par la fibre optique.

Dans tous ces cas, on utilise la réflexion totale de la lumière sur la surface d'un dioptré séparant deux milieux dans les conditions suivantes (fig. 15) :

- la lumière se propage dans un milieu d'indice n_1 qui forme une gaine centrale entourée d'un milieu d'indice n_2 avec $n_1 > n_2$;
- l'angle d'incidence sur la séparation des deux milieux est toujours plus grand que l'angle de réfraction limite. Il y a donc toujours réflexion totale et le rayon reste dans la gaine.

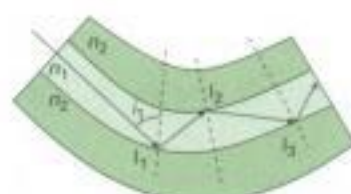


Fig. 15

Propagation guidée de la lumière. On a simultanément $n_1 > n_2$ et l'angle d'incidence supérieur à l'angle limite de réfraction.

C.3. Propagation dans un milieu stratifié

L'application des lois de Snell-Descartes permet de comprendre la notion de mirage optique et d'expliquer certains parcours de la lumière dans des milieux inhomogènes (fig. 16 et 17).

Définition 5

On appelle milieu stratifié un milieu inhomogène dans lequel on peut donner une loi de la variation de l'indice qui ne dépend que d'une variable.

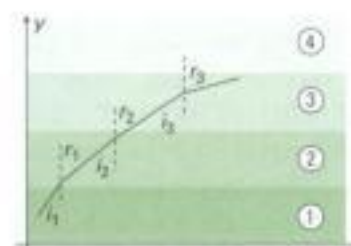


Fig. 16

Parcours d'un rayon lumineux dans un milieu homogène stratifié : On a supposé ici que : $n_1 > n_2 > n_3 > n_4$. Le rayon se courbe du côté des indices les plus forts comme dans le cas de la figure 17.

Par exemple, nous modélisons l'eau sucrée de l'expérience de la figure 17 comme une succession de couches planes homogènes qui diffèrent par leurs indices $n(y)$, où y repère l'altitude de la couche considérée.

On remarque que $r_1 = i_2$ et que $r_2 = i_3, \dots, r_{k-1} = i_k$ (fig. 16). On a donc : $n \sin i = \text{cte} = n_k \sin(i_k)$ lors du parcours du rayon lumineux dans les différentes couches k . La quantité $n_k \sin(i_k)$ qui se conserve au cours des réfractions est appelée invariant de Descartes.

Annexe 1. De l'onde électromagnétique à l'optique géométrique : l'approximation de l'optique géométrique

1. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, nous ne nous intéresserons qu'à la propagation de la lumière dans les milieux transparents.

2. Une eau sucrée (ou salée) constitue un bon exemple de milieu transparent inhomogène (fig. 17).

3. Dans les deux exemples suivants cette condition n'est pas vérifiée :

– près d'un foyer lorsque le faisceau lumineux est focalisé à des dimensions comparables à la longueur d'onde ;
– près des interfaces correspondant au changement de milieu.

4. Dans le cas des petits obstacles ou ouvertures, cette condition n'est pas satisfaite, ainsi que près des interfaces.

5. L'onde plane locale est d'extension limitée dans l'espace contrairement à l'onde plane dont l'étendue est illimitée.

6. Le théorème de Malus énonce que si la longueur d'onde est petite devant les autres dimensions, alors le rayon lumineux est perpendiculaire à la surface d'onde locale.

• Indiquons le cadre de l'étude.

Considérons un milieu transparent¹, linéaire, localement isotrope et dans le cas le plus général inhomogène², ce qui suppose ici que l'indice n de la substance dépend du point considéré dans la substance.

L'étude de l'onde lumineuse qui se propage dans ce milieu, de longueur d'onde comprise entre 380 nm et 780 nm, peut se réduire à l'étude de ses composantes monochromatiques (cf. chapitre 1).

• Quelles sont les conditions d'approximation de l'optique ondulatoire ?

Dans un tel milieu, pour une de ces composantes monochromatiques, la théorie de Maxwell permet d'obtenir une équation de propagation à plusieurs variables. On ne sait résoudre cette équation qu'en la simplifiant à l'aide de considérations physiques concernant l'onde et le milieu.

Ces conditions, dont la détermination dépasse le cadre de cet ouvrage, sont les suivantes :

- l'amplitude E_w du champ électrique qui se propage doit varier lentement à l'échelle de la longueur d'onde³ ;
- les constantes optiques qui caractérisent le milieu, comme l'indice n ou la permittivité ϵ , doivent varier lentement à l'échelle de la longueur d'onde⁴.

Ce que nous pouvons résumer par :

La théorie électromagnétique appliquée à la propagation d'une lumière monochromatique dans la matière admet une solution simple si la longueur d'onde de cette lumière est petite devant les dimensions caractéristiques qu'on peut rencontrer dans le système.

• Le rayon lumineux est une conséquence de la structure de l'onde.

Quant à la structure de l'onde, les hypothèses précédentes étant vérifiées, l'exploitation des relations de Maxwell montre que :

- c'est une onde plane progressive, mais cette fois locale⁵ puisque l'indice varie dans le milieu ;
- l'énergie de l'onde se propage dans une direction perpendiculaire à la surface d'onde du fait que le milieu est isotrope.

La direction de propagation perpendiculaire à la surface d'onde⁶ est donc un rayon d'onde que l'on appelle rayon lumineux.

Du fait du caractère supposé inhomogène du milieu, un rayon d'onde, ou rayon lumineux, va suivre une trajectoire qui ne sera pas rectiligne mais courbe (fig. 17) et dont la forme, donnée par les équations déduites des considérations précédentes, est :

- indépendante de l'orientation du champ électrique de l'onde plane locale ;
- indépendante de la fréquence, si le milieu n'est pas dispersif.

1. Ce sont ces conditions géométriques qui permettent de programmer la simulation donnée en figure 17.

• Nous obtenons alors l'optique dite géométrique

Les courbes suivies par les rayons lumineux dans un milieu transparent, linéaire, localement isotrope et inhomogène, sont donc déterminées uniquement par la géométrie du milieu, c'est à dire :

- la donnée de l'évolution de l'indice dans le milieu ;
- les conditions initiales du rayon arrivant sur ce milieu¹.

On peut donc parler d'optique géométrique puisque le caractère ondulatoire de la lumière (direction du champ électrique, fréquence) ont disparu.

L'approximation de la théorie de Maxwell dans laquelle la longueur d'onde de la lumière est petite devant les dimensions caractéristiques qu'on peut rencontrer dans le système constitue l'optique géométrique : la trajectoire d'un rayon lumineux est entièrement déterminée par la géométrie du milieu comme l'illustre la figure 17.

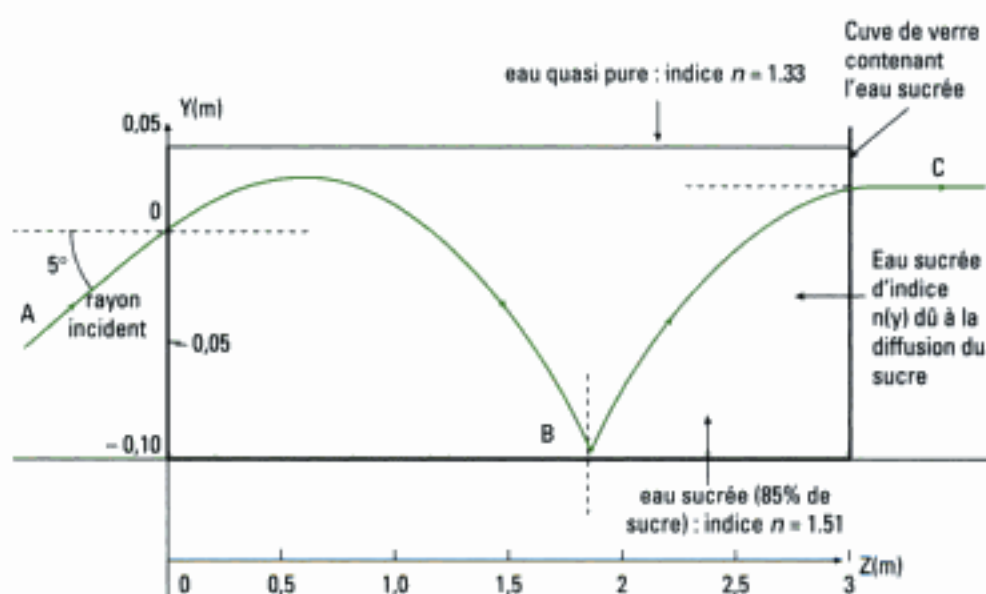


Fig. 17 – Simulation : la lumière venue de l'air entre dans une cuve contenant de l'eau sucrée. Dans l'air, milieu homogène, la trajectoire est une droite. Dans l'eau sucrée elle est courbe, ou plus exactement formée de petites portions de droite successives.

Remarque : dans le cas où le milieu est homogène, une onde plane unique peut s'y propager et la lumière se propage en ligne droite (fig.17).

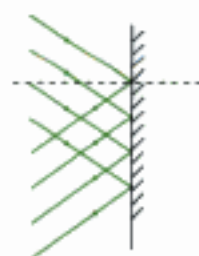


Fig. 18

Réflexion spéculaire sur un miroir plan.

2. Le diamètre apparent du soleil vu depuis un point de la Terre est de l'ordre du demi degré. C'est aussi le plus grand angle entre deux rayons issus du soleil vu de ce point. Les rayons peuvent donc être considérés comme parallèles.

Annexe 2. Réflexion spéculaire et réflexion diffuse

Considérons une onde plane lumineuse qui se propage dans l'espace. Les rayons lumineux associés à cette onde sont donc parallèles². Avec une bonne approximation, la lumière du soleil reçue sur Terre entre dans ce cas.

Si la surface qui reçoit cette lumière est polie comme celle d'un miroir plan, l'angle d'incidence est le même en chaque point d'incidence, ce qui fait que l'angle de réflexion est lui aussi unique par application des lois de Snell-Descartes.

Toute la lumière est donc réfléchiée dans une même direction. Ce type de réflexion est dite **spéculaire** (fig. 18).

Les surfaces non polies sont les plus courantes (fig. 19), comme la feuille de ce livre. Avec une loupe, on peut voir que cette surface est un enchevêtre-



Fig. 19

Réflexion diffuse par une surface non polie.

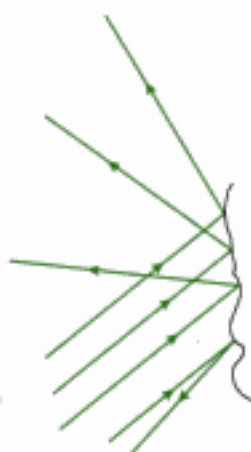


Fig. 20

Réflexion diffuse : détail au niveau de la surface.

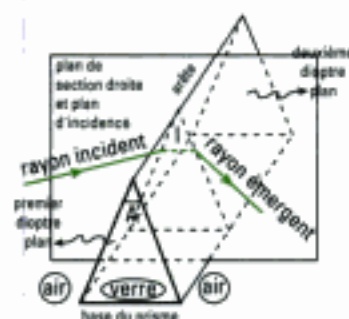


Fig. 21

ment de micro-surfaces qui offrent des orientations fort différentes à la lumière, donc des angles d'incidence variés. Chaque rayon se réfléchit en vérifiant la loi de Snell-Descartes selon laquelle l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. La lumière incidente est donc réfléchiée dans de nombreuses directions différentes. On dit que cette **réflexion** est **diffuse** (fig. 20). Une telle surface est dite mate.

Enfin, pour une surface dite lustrée, comme celle de la porcelaine émaillée, la lumière est réfléchiée à la fois de manière spéculaire et diffuse.

Lors de l'utilisation de surfaces réfléchissantes dans les instruments d'optique, nous devons prévoir avec certitude la direction d'émergence des faisceaux incidents. Seules les surfaces polies ont donc un intérêt optique.

Annexe 3. Étude d'un prisme

Les prismes utilisés en optique sont en verre et leur section droite est triangulaire. Un prisme est donc un ensemble de trois milieux transparents successifs séparés par deux dioptrés plans, qui se coupent selon une droite appelée arête du prisme, et qui font entre eux un angle A appelé l'angle du prisme (fig. 21). La face opposée à cet angle est appelée la base du prisme ; elle est souvent noircie ou dépolie, de sorte qu'elle ne peut servir de face d'entrée ou de sortie du prisme. Le rayon incident sur l'un des dioptrés plan va être dévié par ces surfaces mais nous savons qu'il progressera dans le plan d'incidence. Nous ne nous intéressons qu'aux cas de propagation où le plan d'incidence est normal à l'arête : dans ce cas il est appelé plan de section principale. La déviation du rayon lumineux dépend de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde de la lumière. Dans la suite, nous considérons que la radiation est monochromatique, de couleur jaune puisque les indices des substances sont donnés en utilisant cette radiation.

• Marche d'un rayon lumineux dans le prisme

Ce rayon lumineux est entièrement déterminé par son angle d'incidence i sur la face d'entrée du prisme : i est donc connu. Le chemin suivi par la lumière est ensuite entièrement déterminé par les lois de Snell-Descartes appliquées à chaque face.

Depuis l'air, le rayon arrive en I avec l'incidence i , se réfracte dans le verre, sous l'angle r , en direction de I' où à l'incidence r' il se réfracte éventuellement dans l'air et sort du prisme sous l'émergence i' (fig. 22).

L'éventualité de la réfraction en I' est liée à la valeur de r' .

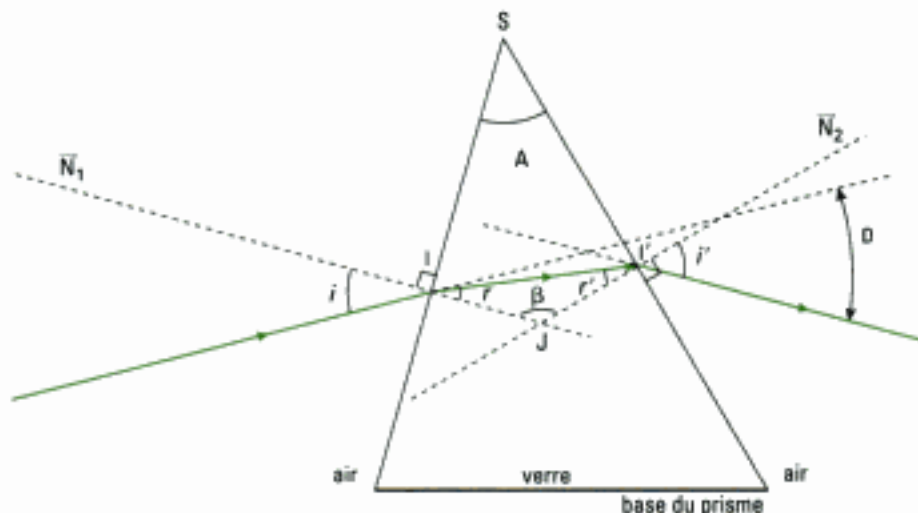


Fig. 22

Si $r' > i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{1}{n} \right)$, il y a réflexion totale et le rayon émergent n'existe pas. Ainsi, r' doit vérifier $r' \leq i_{\text{lim}}$.

Les lois de Snell-Descartes donnent :

$$\text{en I : } \sin i = n \sin r$$

$$\text{en I' : } \sin i' = n \sin r'$$

Comme l'angle d'incidence i est connu, le système de deux équations précédent comporte trois inconnues. Pour que le parcours du rayon soit complètement déterminé, nous devons ajouter une équation à ce système.

Dans le triangle IJI' , on a $r + r' + \beta = \pi$ donc $r + r' = \pi - \beta$.

Dans le quadrilatère $SIJI'$ on a : $A + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ donc : $A = \pi - \beta$.

Les deux relations précédentes nous permettent de conclure que : $A = r + r'$.

Les relations pour un prisme d'indice n et d'angle au sommet A sont donc :

$$\sin i = n \sin r \quad (1)$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad (2)$$

$$A = r + r' \quad (3)$$

Exemple : la figure 22 a été tracée avec les paramètres suivants : prisme en flint d'indice $n = 1,62$, d'angle au sommet $A = 44^\circ$, angle d'incidence $i = 30^\circ$.

On obtient : $r = 18^\circ$; $r' = 26^\circ$; $i' = 45^\circ$.

• Condition sur l'angle A du prisme pour qu'il y ait émergence du prisme

Rappelons que $r' \leq i_{\text{lim}}$; la relation (3) nous indique que la plus petite valeur de r' correspond à la plus grande valeur de r , soit l'angle limite i_{lim} . On a donc aussi $A - i_{\text{lim}} \leq r'$. La double inégalité $A - i_{\text{lim}} \leq r' \leq i_{\text{lim}}$ nous montre qu'il ne peut y avoir émergence que si $A \leq 2i_{\text{lim}}$.

• Déviation par le prisme

Un paramètre intéressant est la déviation D du rayon incident, c'est-à-dire l'angle dont on doit tourner pour amener le rayon incident sur le rayon réfléchi. De fait, à chaque changement de milieu, le rayon a subi une déviation D_1 en I , de valeur $i - r$ et D_2 en I' de valeur $i' - r'$.

On a donc : $D = D_1 + D_2 = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r') = i + i' - A$;

La déviation du prisme s'écrit donc : $D = i + i' - A$. (4)

C'est la quatrième relation du prisme. *A.N.* : $D = 31^\circ$

• Analyse physique des résultats

Traçons les graphes de $r(i)$, $r'(i)$, $i'(i)$ et $D(i)$ en gardant les données précédentes (fig. 23).

Nous observons que :

- la courbe $r(i)$ croît avec i selon $\sin i = n \sin r$, pour atteindre la valeur de

$$i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{1}{n} \right) = 38^\circ \text{ lorsque } i = 90^\circ.$$

- La courbe $r'(i)$ décroît avec i puisque $r' = A - r$. La valeur minimale de r' correspond à la plus grande valeur de r qui est i_{lim} :

$$r'_{\text{min}} = 44^\circ - 38^\circ = 6^\circ.$$

- La courbe $i'(i)$ n'existe que si l'angle i' existe c'est-à-dire si $r' \leq i_{\text{lim}}$.

Comme $r' = A - r$, on en déduit que $r \geq A - i_{\text{lim}}$ et donc :

$$\sin i \geq n \sin(A - i_{\text{lim}}) \quad (5) \text{ puisque } \sin i = n \sin r.$$

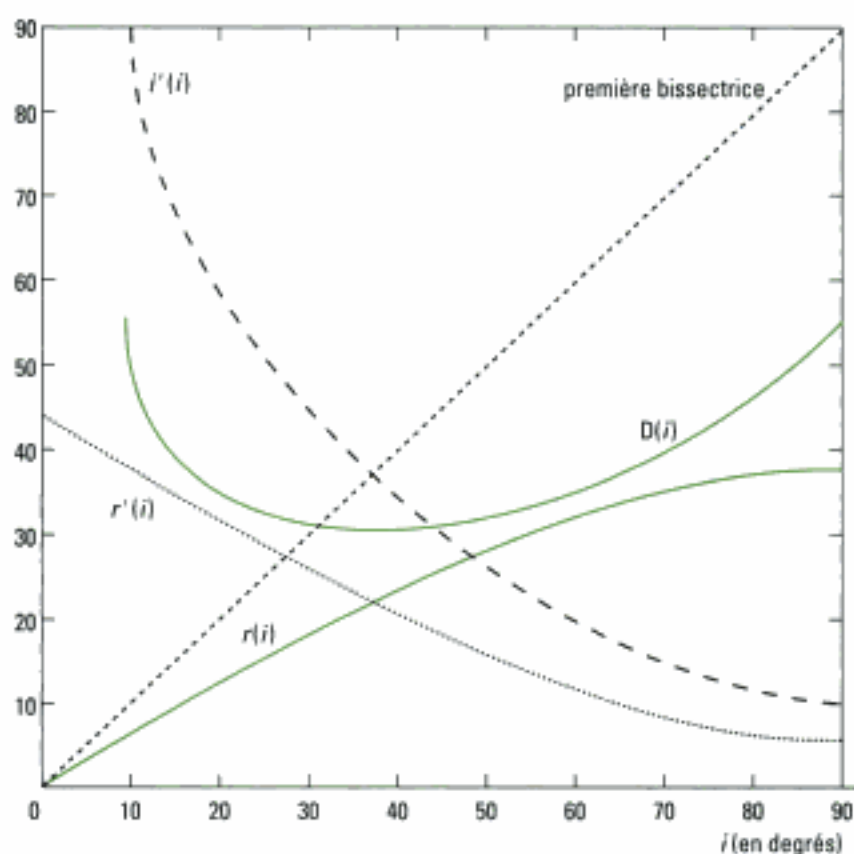


Fig. 23 - Variation de la déviation en fonction de l'angle d'incidence i .

• **Condition sur l'angle d'incidence i pour qu'il y ait émergence du prisme**

Il existe donc un angle minimal d'incidence pour obtenir une émergence sur la seconde face. Cette condition s'écrit :

$$i \geq \text{Arc sin} \left(n \sin \left(A - \text{Arc sin} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right).$$

Dans notre exemple on trouve :

$$i \geq \text{Arc sin} \left(1,62 \sin \left(44 - \text{Arc sin} \left(\frac{1}{1,62} \right) \right) \right) = 9,5^\circ, \text{ valeur inférieure que l'on peut vérifier sur le graphe de } i'(i).$$

La courbe $i'(i)$ est symétrique par rapport à la première bissectrice. Ceci est une conséquence directe de la loi du retour inverse de la lumière appliquée au dispositif.

• **Étude de la déviation**

La déviation a lieu vers la base du prisme.

L'angle de déviation D est d'abord une fonction décroissante de l'angle d'incidence i . Cette déviation passe par un minimum D_m avant de croître de nouveau avec i .

Comme i' , D n'est définie que si :

$$i \geq \text{Arc sin} \left(1,62 \sin \left(44 - \text{Arc sin} \left(\frac{1}{1,62} \right) \right) \right) = 9,5^\circ.$$

D'un point de vue mathématique, les angles i et $i' = D + A - i$ donnent la même déviation. À une valeur de D correspondent donc deux valeurs de l'angle d'incidence, sauf dans le cas où $i = i'$.

Nous sommes donc en présence d'un extremum de la fonction $D(i)$ lorsque $i = i'$. La courbe nous montre que c'est un minimum.

Nous pourrions vérifier mathématiquement l'existence de cet extremum en montrant que la dérivée première de la fonction $D(i)$ s'annule pour une valeur i_m de i et que cet extremum est un minimum en étudiant le signe de la dérivée seconde de $D(i)$ par rapport à i , prise à l'extremum. Nous trouverions effectivement que $(D''(i))_{i=i'=i_m} > 0$.

La déviation D du prisme passe donc par un minimum.

• Relations du prisme au minimum de déviation

Comme $i = i' = i_m$ au minimum de déviation, on en déduit que $r = r'$ d'après la loi de la réfraction. Il vient ensuite $A = r + r' = 2r_m$ donc :

$r_m = \frac{A}{2}$. Comme $\sin i = n \sin r$ on a aussi :

$$i_m = \text{Arc sin} (n \sin r) = \text{Arc sin} \left(n \sin \left(\frac{A}{2} \right) \right).$$

A.N. $i_m = 30,7^\circ$ avec les données précédentes

L'expression de la déviation minimale est donc :

$$D_m = i_m + i'_m - A = 2i_m - A ; \text{ soit encore : } i_m = \frac{A + D_m}{2}.$$

Au minimum de déviation, la relation $\sin i = n \sin r$ est encore vérifiée.

Avec les valeurs particulières : $r_m = \frac{A}{2}$ et $i_m = \frac{A + D_m}{2}$, elle s'écrit :

$$\sin \left(\frac{A + D_m}{2} \right) = n \sin \left(\frac{A}{2} \right).$$

En pratique, nous cherchons le minimum de déviation D_m en faisant varier l'angle d'incidence i . Connaissant l'angle A du prisme on peut en déduire l'indice n . C'est une méthode précise de détermination de l'indice d'une substance.

Application : si l'on réalise l'expérience, on trouve un minimum de déviation $D_m = 30,7^\circ$: l'angle d'incidence vaut alors $i = 37^\circ$.

$$\text{On trouve alors } n = \frac{\sin \left(\frac{A + D_m}{2} \right)}{\sin \left(\frac{A}{2} \right)} = \frac{\sin \left(\frac{44 + 30,7}{2} \right)}{\sin \left(\frac{44}{2} \right)} = 1,62 \text{ ce qui est}$$

conforme aux paramètres de départ.

• Dispersion par un prisme

Jusque-là, nous avons considéré que la radiation est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$, ce qui fait que l'indice est $n = 1,62$ pour ce verre flint. Que se passe-t-il pour une radiation monochromatique de fréquence différente ?

Choisissons les fréquences de référence associées aux couleurs rouge et bleue indiquées au chapitre 1, respectivement $\lambda_p = 486,6 \text{ nm}$; $\lambda_c = 656,3 \text{ nm}$.

En utilisant la loi d'Abbe (cf. chap. 1) nous obtenons les indices correspondants $n_p = 1,63$ et $n_c = 1,61$.

Traçons la courbe de la déviation D en fonction de i pour chacun de ces indices, entre les angles d'incidence 15° et 65° par exemple (fig. 24).

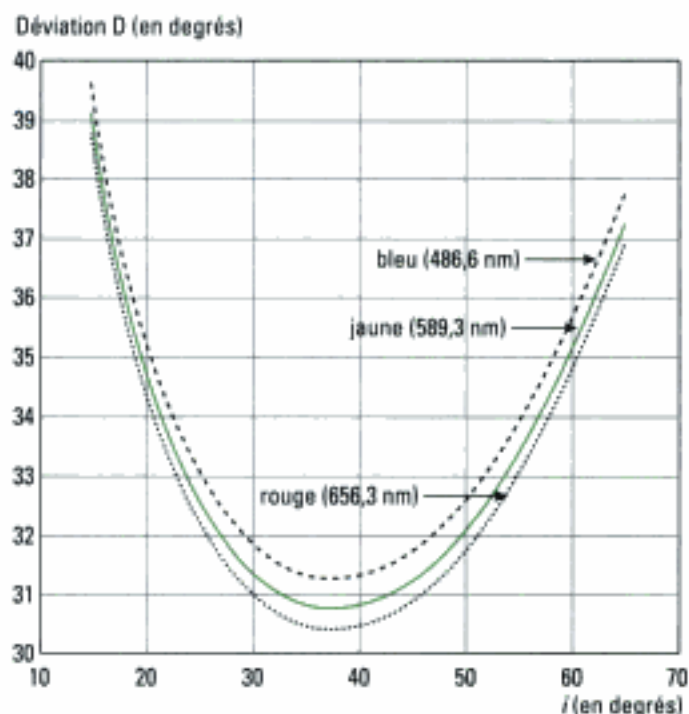


Fig. 24 – Variations de la déviation D en fonction de i , pour différentes longueurs d'ondes.

Nous voyons que le prisme dévie plus la lumière bleue que la jaune et plus la jaune que la rouge. Au minimum de déviation nous avons les valeurs respectives : $31,2^\circ$; $30,7^\circ$; $30,5^\circ$.

Une lumière composée de plusieurs couleurs sera donc décomposée par le prisme. On dit qu'il y a dispersion de la lumière. Les radiations bleues seront plus déviées vers la base du prisme que les rouges.

On comprend aussi tout l'intérêt qu'il y a à travailler au minimum de déviation : c'est là que l'écart de déviation entre les radiations est le plus grand. On peut penser que cet écart est petit mais ce serait oublier que ces mesures d'angles se font avec une lunette de visée et un vernier, par exemple avec un spectrogoniomètre, de sorte que les radiations bleue et jaune par exemple, seront séparées. On pourra mesurer l'indice du prisme pour la radiation jaune et pour la radiation bleue, séparément.

• **Cas du prisme de petit angle au sommet éclairé sous incidence quasi normale**

Dans ce cas, les angles d'incidence et de réfraction sont petits sur les deux faces du prisme. Nous utilisons alors les relations de Képler :

$i = nr$ et $i' = nr'$. Les relations générales du prisme déjà établies sont encore valables mais elles se simplifient :

$$D = i + i' - A = nr + nr' - r - r' = (n - 1)A.$$

La déviation ne dépend plus que de l'indice du prisme et de son angle au sommet : $D = (n - 1)A$.

L'essentiel

✓ Rayons lumineux

- Le cadre de l'optique géométrique est celui où la longueur d'onde de la lumière est petite devant les dimensions caractéristiques du système où la lumière se propage.
- L'optique géométrique repose sur la notion de rayon lumineux.
- Ces rayons lumineux sont indépendants, se propagent en ligne droite dans un milieu homogène, et suivent au retour le même chemin qu'à l'aller.
- Dans le cadre de l'optique géométrique, la trajectoire d'un rayon lumineux est entièrement déterminée par la géométrie du milieu.

✓ Dioptre et miroir

- Un dioptre est une surface de séparation entre deux milieux transparents d'indices optiques différents.
- Un miroir est une surface qui réfléchit pratiquement toute la lumière qu'elle reçoit.

✓ Lois de Snell-Descartes

- Lorsqu'un rayon lumineux aborde la surface d'un dioptre ou d'un miroir, il donne généralement naissance à :
 - un rayon réfléchi,
 - un rayon transmis dans le cas d'un dioptre,
 - un rayon réfléchi dans le cas d'un miroir.

Pour un miroir :

- Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.
- L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Pour un dioptre :

- Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
- L'angle d'incidence et l'angle de réfraction vérifient la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

- Les lois de Képler sont une forme approchée des lois de Snell-Descartes lorsque les angles sont petits.

✓ Relations du prisme

- Pour un prisme d'angle au sommet A , s'il existe un rayon réfracté par la deuxième face, la déviation D , entre le rayon incident sous l'angle i et le rayon transmis sous l'angle i' , se met sous la forme : $D = i + i' - A$, avec $A = \pi + \pi'$.
- Au minimum de déviation D_m on a : $\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$.
- Pour des petits angles : $D = (n - 1) A$.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment déterminer le plan d'incidence ?

→ Problème à résoudre

On souhaite déterminer le plan d'incidence correspondant à un rayon et à un dioptre donnés.

→ Savoir faire

- 1 Identifier le point d'incidence I , intersection entre le rayon incident et le dioptre.
- 2 Tracer le plan π_t tangent au dioptre au point I en s'aidant éventuellement d'un élément de surface dS appartenant au dioptre, autour du point I : le plan π_t contient dS .
- 3 Tracer la normale \vec{N} au dioptre au point d'incidence : \vec{N} est perpendiculaire au plan π_t en I .
- 4 Repérer le plan d'incidence π_i , qui contient le rayon incident et la normale \vec{N} au point d'incidence.

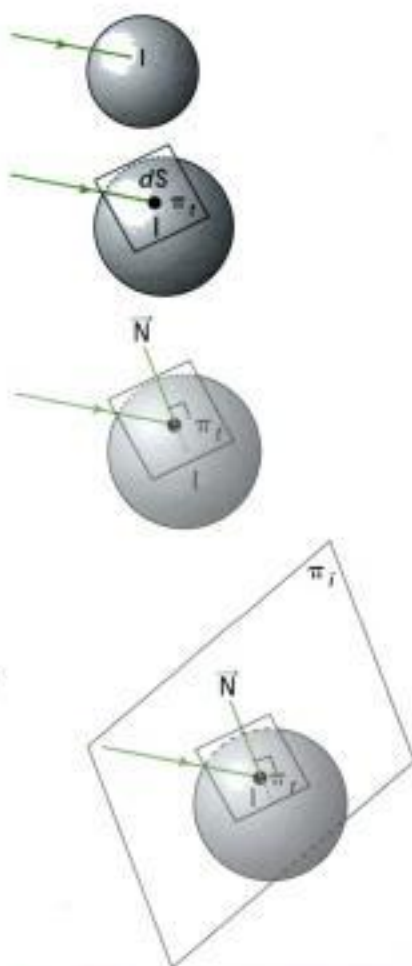
→ Application

Trouver le plan d'incidence correspondant à un rayon incident sur une bille en verre.

Solution

- 1 On place le point I .
- 2 On trace le plan π_t tangent au dioptre en I .
- 3 On trace la normale \vec{N} au point d'incidence.
- 4 On repère le plan d'incidence π_i .

Les plans π_t et π_i sont perpendiculaires.
Dans ce cas précis, la normale \vec{N} passe par le centre de la bille.



Méthode n°2

Comment construire géométriquement le trajet d'un rayon correspondant à un rayon incident donné sur la surface d'un dioptré ?

→ Problème à résoudre

Le dioptré et le rayon incident étant connus, on souhaite déterminer le trajet suivi par un rayon arrivant sur la surface d'un dioptré séparant les milieux 1 et 2.

→ Savoir faire

- ① Repérer le plan d'incidence qui contient le rayon incident et la normale \vec{N} au point d'incidence en utilisant la méthode 1
- ② Dans tous les cas et particulièrement dans le cas où la question porte sur un tracé, faire un dessin dans le plan d'incidence qui est aussi le plan de la feuille : reporter ou mesurer l'angle d'incidence i_1 entre le rayon incident et la normale sur le dessin.
- ③ Comparer les indices n_1 et n_2 et des milieux :
Si $n_1 < n_2$, il y a toujours un rayon transmis, passer à l'étape ④.
Si $n_1 > n_2$, il peut y avoir réflexion totale ; calculer $i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$.
Si $i_1 \leq i_{\text{lim}}$, il y a un rayon transmis, passer à l'étape ④.
Si $i_1 > i_{\text{lim}}$, il y a réflexion totale sans transmission. Le rayon se réfléchit avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence i_1 . Passer à l'étape ⑤.
- ④ Appliquer la loi de Snell-Descartes pour calculer l'angle de réfraction i_2 .
- ⑤ Si la question porte sur une construction, tracer le ou les rayons en reportant les angles par rapport à la normale.

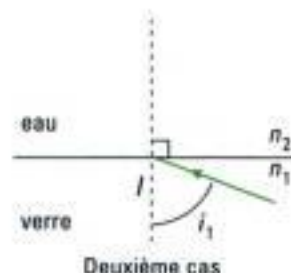
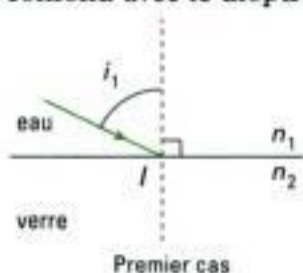
→ Application

Un faisceau cylindrique arrive sur un dioptré plan séparant de l'eau d'indice 1,33 et du verre d'indice 1,50. Déterminer le trajet du rayon si l'angle d'incidence est de 65° et que le rayon progresse de l'eau dans le verre dans un premier temps, puis du verre dans l'eau dans un second temps.

Solution

① Le plan d'incidence est le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptré plan au point d'incidence I.

② Le plan de la feuille est choisi comme plan d'incidence. On y reporte le rayon incident et la normale qui se coupent en I. On trace le plan tangent au dioptré qui est ici perpendiculaire au plan de figure et se confond avec le dioptré plan.



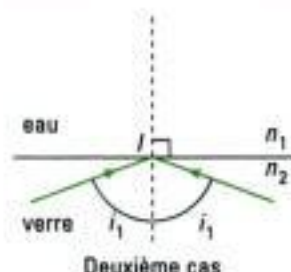
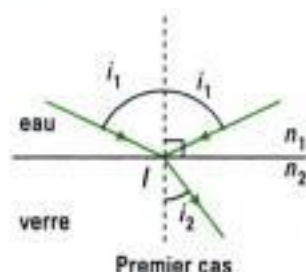
Premier cas :

- ① $n_1 < n_2$, il y a donc toujours un rayon transmis.
- ② L'angle de réfraction est $i_2 = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin(i_1) \right) = 53^\circ$.
- ③ Voir tracé ci-dessous.

Second cas :

- ① $n_1 > n_2$, il peut y avoir réflexion totale. Il faut calculer $i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) = 62^\circ$.

Comme $i_1 = 65^\circ > i_{\text{lim}}$, le rayon est totalement réfléchi. Il n'y a donc pas de rayon transmis.



Méthode n°3

Comment déterminer une déviation lorsqu'un même rayon subit plusieurs changements de direction sur des dioptries ou des miroirs ?

→ Problème à résoudre

Le trajet d'un rayon lumineux étant supposé connu, on souhaite déterminer la déviation de ce rayon, c'est à dire l'angle que fait le rayon émergent par rapport au rayon incident.

→ Savoir faire

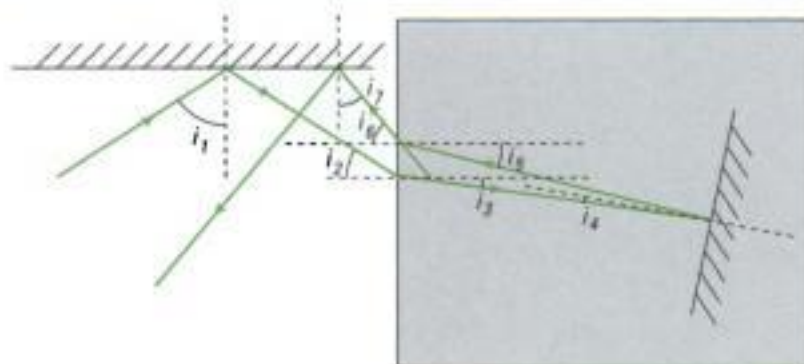
① Lorsqu'une déviation résulte de plusieurs déviations successives non orientées dans le même sens, il faut considérer la déviation D comme algébrique en orientant les angles, si possible dans le sens trigonométrique. La déviation D a donc un signe. Indiquer le sens des angles par rapport à la normale au point d'incidence.

② À chaque dioptre ou miroir k , exprimer la déviation D_k correspondante en gardant toujours le même sens d'orientation des angles.

③ Pour obtenir la déviation totale, faire la somme des déviations individuelles : $D = \sum_k D_k$.

→ Application

Exprimer la déviation du rayon lumineux dans l'exemple ci-dessous, les angles étant connus.



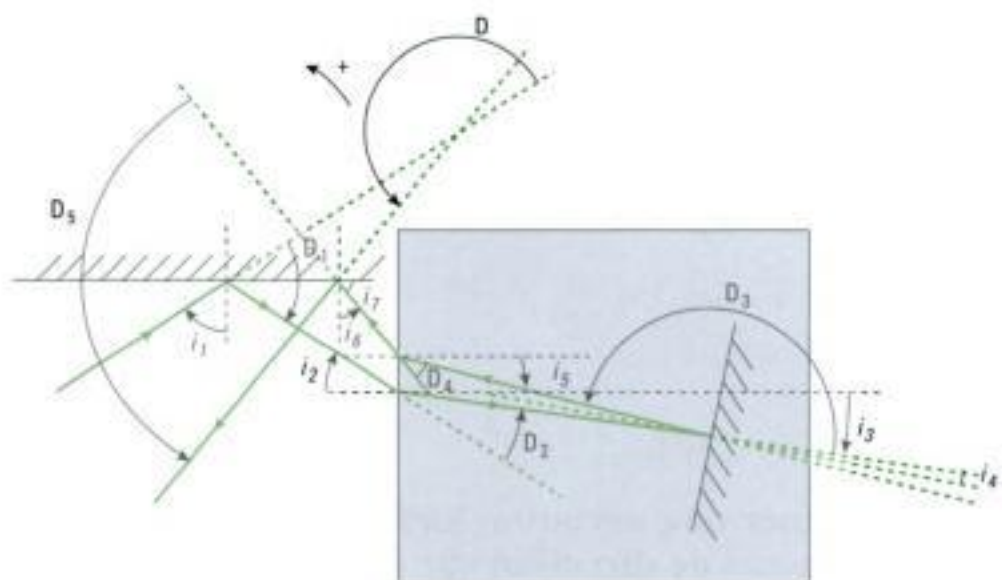
Solution

- 1 On choisit une orientation dans le sens positif trigonométrique. On repère les angles par rapport à la normale.
- 2 On repère géométriquement la déviation totale et les déviations à chaque changement de direction.

On obtient :

$$D_1 = -\pi - 2i_1; \quad D_2 = -i_2 + i_3; \quad D_3 = \pi - 2i_4; \quad D_4 = i_6 - i_5;$$

$$D_5 = \pi - 2i_7; \quad \text{d'où : } D = \pi - 2i_1 - i_2 + i_3 - 2i_4 + i_6 - i_5 - 2i_7.$$



Exercices

Niveau 1

Ex. 1 La grenouille

Une grenouille est cachée dans l'eau sous le centre d'un nénuphar de rayon $r = 5$ cm.

Quelle est la hauteur h de la grenouille si on ne peut la voir depuis l'air ?

Ex. 2 Tracé de rayons transmis par un dioptre de forme sphérique

Les dioptres sphériques sont très répandus en optique (lentilles sphériques, miroirs sphériques).

Considérons une carafe pleine d'eau, de forme sphérique, qui constitue un tel dioptre de centre C , de rayon R , séparant l'air de l'eau.

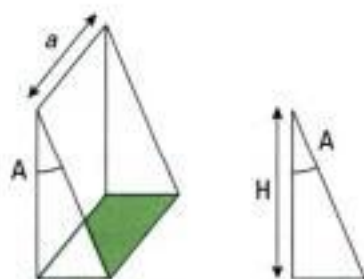
Un rayon lumineux issu d'un point A en dehors de la carafe arrive sur le dioptre. On néglige la réfraction dans le verre de l'enveloppe. Dans l'eau, tracer le parcours d'un tel rayon dans le cas où il est peu incliné sur l'axe et dans le cas où il est fortement incliné sur l'axe. Commenter le résultat.

Ex. 3 Que voit un poisson vers le haut ?

Un poisson est posé sur le fond d'un lac : il regarde vers le haut et voit à la surface de l'eau un disque lumineux de rayon r , centré à sa verticale, dans lequel il aperçoit tout ce qui est au-dessus de l'eau.

- Expliquer cette observation.
- Le rayon du disque est $r = 3,0$ m. À quelle profondeur se trouve le poisson ?

Ex. 4 Déviation d'un faisceau parallèle par un prisme



Un faisceau parallèle tombe sous incidence normale sur toute la face d'entrée d'un prisme de petit angle au sommet A , de hauteur H , de longueur d'arête a et d'indice N .

Données numériques : $A = 2,90 \cdot 10^{-3}$ rad ; $N = 1,500$.

- Représenter sur un schéma le faisceau émergent du prisme, dans un plan de section principale.
- Exprimer l'angle de déviation D en fonction des paramètres A et N du prisme en tenant compte de la faible valeur de l'angle A .
- Calculer l'angle de déviation D .

Écrit, Écrin 96.

Niveau 2

Ex. 5 Mise en évidence de faibles rotations

Un pinceau lumineux arrive perpendiculairement en I à la surface d'un miroir plan M . Ce miroir peut tourner autour d'un axe Δ passant par I et perpendiculaire au plan d'incidence.

- Le miroir tourne d'un angle α autour de Δ . De quel angle β tourne le rayon réfléchi dans le même temps ?
- À la distance $D = 1$ m, on place une règle R graduée parallèle au miroir et perpendiculaire au pinceau. Le plus petit déplacement visible de la tache lumineuse réfléchie arrivant sur la règle est $d = 1$ mm. Quel est le plus petit angle de rotation mesurable avec ce dispositif ?

Ex. 6 Peut-on voir le fond d'une piscine ?

Peut-on voir le pied d'une échelle s'appuyant sur le fond et au bord d'une piscine cylindrique de rayon $R = 3$ m, de hauteur $h = 2$ m, en plaçant les yeux proches de la surface en un point diamétralement opposé à l'échelle ?

Ex. 7 Traversée d'une lame à faces parallèles

Sur la face supérieure d'une lame de verre formée de deux dioptres plans parallèles, d'épaisseur $e = 8,0$ cm, d'indice $n_2 = 1,5$, plongée dans l'air dont on supposera l'indice n_1 égal à 1, arrive un pinceau lumineux sous une incidence $\theta = 60^\circ$.

- Quel est l'angle de la transmission dans la lame ?
- Quel est l'angle d'émergence de la lame ? Commenter le résultat.
- Aurait-on pu trouver le résultat de la question précédente plus rapidement ?
- Quelle est la déviation angulaire totale du rayon. Était-ce prévisible ?
- Exprimer et calculer la déviation latérale d du faisceau en fonction de e , des angles d'incidence et d'émergence sur l'interface supérieure. Commenter le résultat.
- À partir de la relation obtenue à la question précé-

dente, montrer que la déviation latérale peut se mettre sous la forme :

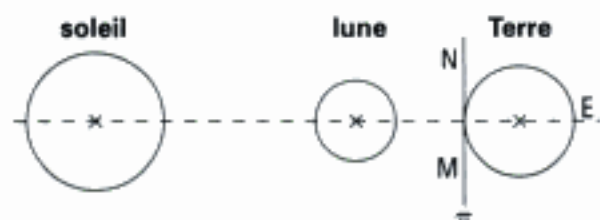
$$d = e \sin(\theta_1) \left(1 - \frac{n_1 \cos(\theta_2)}{n_2 \cos(\theta_1)} \right).$$

À quelle condition la déviation d sera-t-elle proportionnelle à e et θ_1 ?

Quelle utilisation peut-on faire de cette propriété ?

g) Exprimer la déviation d en fonction de e , θ_1 , n_1 et n_2 .

Ex. 8 Éclipse de soleil



Dans le dessin ci-dessus, la Terre, la lune et le soleil sont alignés lors d'une éclipse de soleil.

Dans l'ombre portée de la lune, il y a éclipse totale.

a) Pour l'éclipse du 21/1/2000, calculer la longueur ℓ du cône d'ombre de la lune et vérifier que son sommet C se trouve au-delà du point E.

b) Calculer le rayon r du disque MN contenu dans le plan π perpendiculaire au plan de la représentation, à l'intérieur duquel il y a éclipse totale.

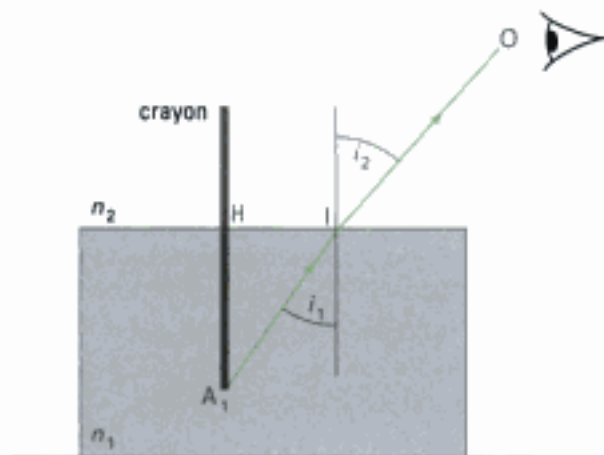
Données :

rayon du soleil : $R_s = 6,96 \cdot 10^8$ m ; rayon de la Terre : $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m ; rayon de la Lune : $R_L = 1,76 \cdot 10^6$ m. Distance Terre-soleil : $D = 150 \cdot 10^6$ km. Distance Terre-Lune pour l'éclipse du 21/1/2000 : $d = 3,57 \cdot 10^8$ m.

Ex. 9 Profondeur apparente

On trempe un crayon dans l'eau, orthogonalement à la surface de l'eau supposée plane.

L'extrémité A_1 du crayon immergé est repérable par une petite tache de couleur. Ce point envoie de la lumière vers un observateur qui la reçoit dans la direction IO proche de la verticale.



a) Exprimer la profondeur apparente HA_2 en fonction de n_1 , n_2 et HA_1 .

b) Application : un observateur estime le fond de la rivière, situé à l'aplomb d'un pont, à 2 m sous la surface. Quelle est la profondeur réelle de la rivière ?

c) À partir des questions précédentes, expliquer l'observation faite à la figure 5 du cours.

d) Dans l'air, la couleur rouge de la tache correspond à une lumière de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm.

1. Quelle est la longueur d'onde λ_0 de cette lumière dans l'eau ?

2. À quelle couleur correspondrait dans l'air la longueur d'onde précédemment calculée ?

3. Quelle serait la couleur de la tache si on la regardait dans l'eau en supposant que la lumière n'est pas absorbée par l'eau ?

Ex. 10 Mesure de l'indice d'un liquide

Une cuve en verre a la forme d'un prisme de section droite rectangle isocèle. Elle est posée horizontalement sur une des arêtes de longueur ℓ du triangle isocèle, et le sommet opposé à ce côté est ouvert pour permettre de remplir la cuve d'un liquide transparent d'indice n . Un pinceau de lumière est envoyé horizontalement sur la face verticale de la cuve, dans un plan de section droite, à la hauteur $\frac{\ell}{2}$. Ce rayon émerge au-delà de l'hypoténuse et rencontre en un point P un écran E placé verticalement à la distance ℓ de la face d'entrée du dispositif. On néglige l'effet dû aux parois en verre sur la propagation du pinceau de lumière.

En P on observe sur l'écran une trace du pinceau à la hauteur z , repérée par rapport au plan horizontal formé par le bas de la cuve.

a) Faire un dessin du dispositif.

b) Quelle limite supérieure peut-on donner à la valeur de l'indice ?

c) Quel est l'indice n du liquide contenu dans la cuve ?

d) A.N. $\ell = 30$ cm ; $z = 6,7$ cm.

Calculer l'indice n de la substance et en donner la nature possible (cf. Tableau du chapitre 1).

Niveau 3

Ex. 11 Observation d'un thermomètre à mercure

Un thermomètre à mercure est constitué d'un cylindre de verre creux contenant du mercure.

R_e et R_i sont les rayons extérieur et intérieur de ce cylindre. Un observateur O placé à la distance d de l'axe du cylindre regarde ce thermomètre. On raisonne dans le plan qui contient O et perpendiculaire à l'axe du cylindre.

- a) Sous quel angle α_M l'observateur voit-il le thermomètre à mercure ?
 b) Sous quel angle α l'observateur voit-il la colonne de mercure ?
 c) Le mercure peut-il sembler occuper tout le diamètre du tube ?
 d) A.N. Calculer α_M et α lorsque $n = 1,5$; $R_1 = 0,4$ mm ; $R_2 = 3$ mm et $d = 25$ cm.
 e) Quelle doit être la valeur du rayon extérieur pour que le mercure semble occuper tout le tube ?

Ex. 12 Étude d'un spectroscopie à prisme

On considère un prisme d'angle A et d'indice n (fig. 1).

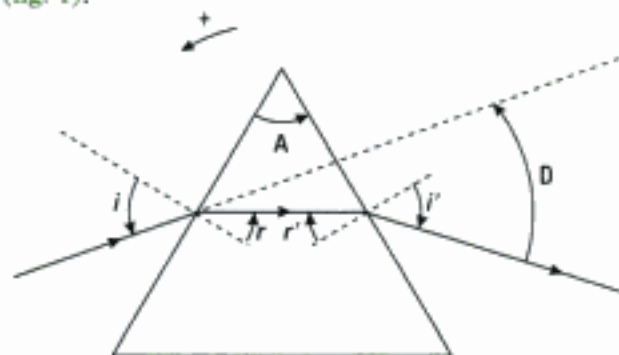


Fig. 1

a) En respectant les notations de la figure ci-dessus et le choix du sens positif pour les angles, justifier rapidement les relations du prisme :

$$\sin i = n \sin r ; \sin i' = n \sin r' ; A = r - r'.$$

b) Calculer la déviation D , du rayon émergent par rapport au rayon incident, en fonction de i' , i et A .

c) On considère le train de trois prismes disposés comme indiqué sur la figure 2. Les deux prismes extrêmes sont identiques d'angle $A = 90^\circ$ et d'indice n . Le prisme intermédiaire a un angle A_0 et un indice n_0 . L'ensemble présente une symétrie par rapport au plan π bissecteur du dièdre A_0 .

Les indices n et n_0 sont fonctions de la longueur d'onde et l'on donne :

$$\lambda(\text{nm}) = 589,3 ; n = 1,51105 ; n_0 = 1,63620$$

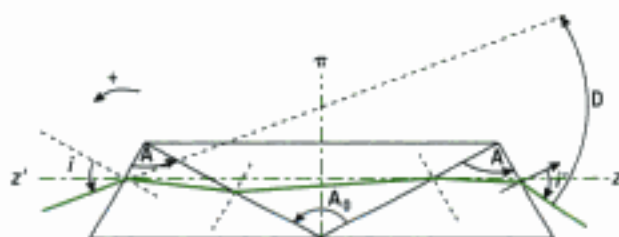


Fig. 2

Calculer la déviation D en fonction de i' , i et A_0 .

d) On veut que cette déviation soit nulle, pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 589,3$ nm, pour les rayons incidents parallèles à l'axe $x'z$ orthogonal au plan π .

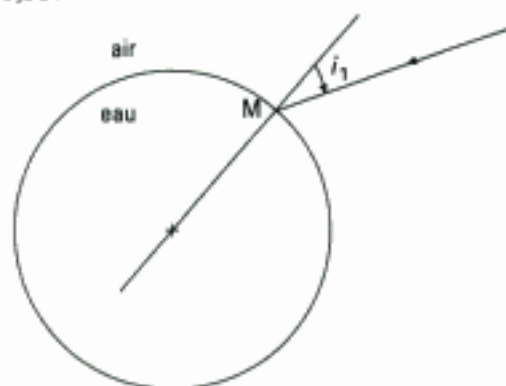
i) Tracer la marche d'un tel rayon.

ii) Exprimer A_0 en fonction de n et n_0 , pour qu'il en soit ainsi. Calculer A_0 numériquement.

Écrit, ENS Cachan 97

Ex. 13 Étude simplifiée de l'arc-en-ciel

Soit la figure 1 qui donne la coupe d'une goutte d'eau dans un plan méridien où arrive un rayon incident monochromatique sur la goutte d'eau d'indice $n = 1,33$.



a) Étude géométrique

i) Tracer le parcours du rayon incident dans la goutte d'eau en admettant que ce rayon ne subit qu'une seule réflexion interne.

ii) Pour le rayon sorti de la goutte, déterminer la déviation D en fonction de i_1 et n .

iii) Montrer que la déviation D passe par un extremum D_m pour une valeur i_{1m} de i_1 que l'on calculera. On rappelle que la dérivée de la fonction :

$$f(x) = \text{Arc sin}(x) \text{ est : } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

iv) Montrer que cet extremum est un minimum.

Le modèle de l'arc-en-ciel est maintenant introduit à partir du concept de la goutte d'eau sphérique de rayon R , d'indice n , recevant des rayons lumineux provenant du soleil supposé ponctuel et à l'infini. Le rayon lumineux pénètre dans la goutte, y subit une réflexion et en ressort.

v) Pourquoi observe-t-on un arc de cercle ? On s'aidera d'un schéma de la situation pour se rendre compte de la symétrie du phénomène.

vi) Pourquoi l'observation du phénomène est-elle impossible à midi ?

vii) Deux observateurs distants de quelques mètres voient-ils la même image du phénomène ?

b) Étude de la dispersion

Dans cette partie on travaille en lumière blanche.

i) Quelle est l'étendue du spectre visible dans le domaine des longueurs d'onde ?

ii) Pourquoi observe-t-on des couleurs dans l'arc-en-ciel ?

iii) On donne les indices de l'eau pour les radiations bleue et rouge du spectre de la lumière blanche : $n_B = 1,3371$; $n_R = 1,3311$. Calculer les angles d'incidence correspondant à la déviation minimale pour chacune de ces radiations, puis les déviations minimales correspondantes.

iv) Quel est l'ordre des couleurs vues par l'observateur ?

D'après écrit CAPES 93

Ex. 14 Fibre optique à saut d'indice

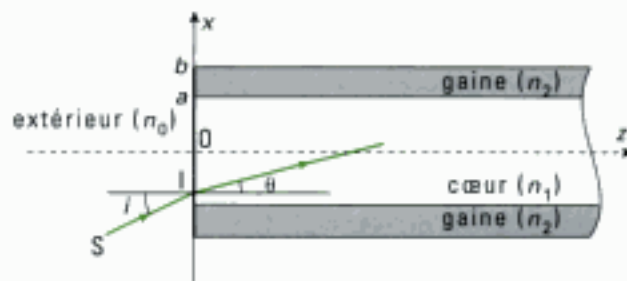
Soit une fibre optique F constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1 , entouré d'une gaine d'indice n_2 inférieur à n_1 et de rayon extérieur b . Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires au cylindre d'axe Ox formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 et pour les applications numériques on supposera que ce milieu est de l'air pour lequel $n_0 = 1$.

a) • Zigzag • plan

Un rayon lumineux SI arrive en un point I sur la face d'entrée de la fibre. À quelle(s) condition(s) d'incidence ce rayon a-t-il, dans la fibre, un trajet plan ?

On considère un rayon SI incident sur le cœur et contenu dans le plan Oxz .

On appelle i l'angle d'incidence et θ l'angle de la réfraction sur la face d'entrée de la fibre.



b) Déterminer en fonction de n_0 , n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur.

La valeur maximale de i est alors désignée par i_c (angle d'acceptance de la fibre).

c) On appelle ouverture numérique (O.N.) du guide la quantité $O.N. = n_0 \sin i_c$.

Exprimer O.N. en fonction de n_1 et n_2 .

d) Calculer i_c et O.N. pour une fibre d'indices $n_1 = 1,456$ (silice) et $n_2 = 1,410$ (silicone).

Quelle serait la valeur de ces grandeurs pour un guide à base d'arséniure de gallium pour lequel $n_1 = 3,9$ et $n_2 = 3,0$? Commenter.

L'atténuation de la lumière dans les fibres optiques est due à l'absorption et à la diffusion par le matériau constitutif du cœur et par ses impuretés (Fe^{2+} , Cu^{2+} , OH^-). Elle se mesure en décibels par km :

$$A \text{ (dB/km)} = \frac{10}{\ell \text{ (km)}} \log_{10} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 désignent les flux lumineux dans les plans de front successifs 1 et 2 distants de ℓ .

e) On parvient couramment à réaliser des fibres dans lesquelles le flux, après un parcours de 50 km, représente 10 % du flux incident. Calculer l'atténuation de telles fibres.

Application. Endoscope à fibres, fibroscope.

Le but d'un endoscope est de permettre à un observateur de « voir » dans des endroits inaccessibles, d'intérêts divers (médical, militaire, industriel, etc.). L'endoscope à fibres est constitué de deux faisceaux de fibres : l'un éclaire le site, l'autre assure le retour vers l'extérieur de la lumière émise par la cible éclairée. Le nombre de fibres constituant chaque faisceau est de l'ordre de 10^4 à 10^6 .

f) Si l'on imagine la cible divisée en environ 10^5 petits carrés, chaque fibre au voisinage de la cible recueillant la lumière de l'un d'eux, quel est le problème posé à l'autre extrémité par la reconstitution de l'image ? Quel est le problème technologique majeur posé alors par la fabrication du faisceau de fibres ?

Écrit ENSAM, ESTP, ENSAIS, ÉCRIN, ARCHIMÈDE 2000.

Indications

Ex. 9

Chercher où est géométriquement situé le point A_2 et utiliser le fait que l'observateur est proche de la verticale.

Ex. 11

L'observateur ne peut voir du tube que les points qui émettent des rayons lui parvenant.

Ex. 12

Se servir des relations à démontrer au départ, dont le résultat est donné, sans oublier que les angles sont orientés.

Ex. 13

Il y a intérêt à considérer comme algébrique une déviation lorsqu'elle est composée de plusieurs déviations successives.

Ex. 14

Les dioptries simples (sphériques ou plans) ne permettent pas de remarquer que la normale au point d'incidence est perpendiculaire au plan tangent au dioptre au point d'incidence (cf. cours).

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

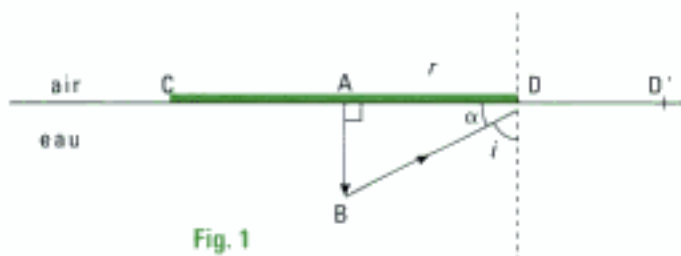


Fig. 1

AB matérialise la grenouille et CD le nénuphar (fig. 1).

☀️ Pour que la grenouille ne soit pas vue depuis l'air, il faut que le rayon BD soit toujours réfléchi totalement. Tout autre rayon BD' le sera alors obligatoirement puisque $ADB = AD'B$ (méthode 2).

On a donc $i > i_{\text{lim}}$ donc $\alpha < \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$ et $\tan \alpha < \tan \left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right)$

Or, $\tan \alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{h}{r} < \tan \left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right)$

La hauteur de la grenouille doit donc être

$$h < r \tan \left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}} \right) \quad \text{avec } i_{\text{lim}} = \arcsin \left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \right)$$

A.N. $h < 4,4 \text{ cm}$, ce qui est tout à fait plausible.

Exercice 2

On ne précise pas la direction du rayon. Il faut donc, dans ce cas d'exercice « ouvert » poser le cadre de l'étude, faire des hypothèses.

☀️ On sait qu'il faut rechercher le plan d'incidence (méthode 1).

Quel que soit le point d'incidence I, la normale en ce point passe par le centre de la sphère. Le plan d'incidence est donc le plan qui contient le rayon lumineux et le rayon du cercle CI. Ce plan contient aussi la surface dioptrique dont la trace dans le plan d'incidence est un cercle. On fait le dessin dans le plan d'incidence.

Le rayon choisi est $R = 2 \text{ cm}$ et A est placé à $2,5 \text{ cm}$ du dioptré.

AC est axe de symétrie du dioptré. On choisit deux rayons incidents issus du point A.

Pour le rayon incident AI_1 , on mesure au rapporteur l'angle d'incidence de ce rayon par rapport à la normale CI_1 .

Ici, $i_1 = 27^\circ$. On calcule ensuite l'angle de réfraction r_1 tel que $r_1 = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \right) \approx 20^\circ$.

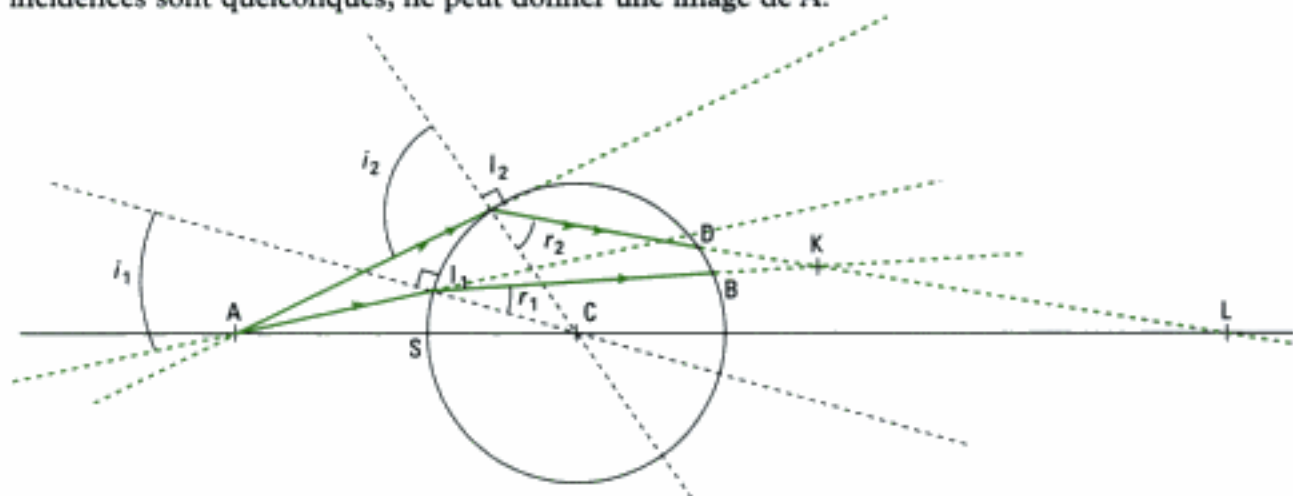
On reporte cet angle par rapport à la normale et on trace le rayon émergent. Même démarche à faire pour le rayon AI_2 ($i_2 = 80^\circ$; $r_2 = 47,7^\circ$).

Commentaire :

Si le second milieu n'était que de l'eau (pas de dioptré en sortie en D et B), les rayons AI_1B et AI_2D se couperaient en K qui serait donc une image de A.

De même AI_2D et ASC (rayon non décrié puisqu'à incidence nulle) se coupent en L, nouvelle image de A.

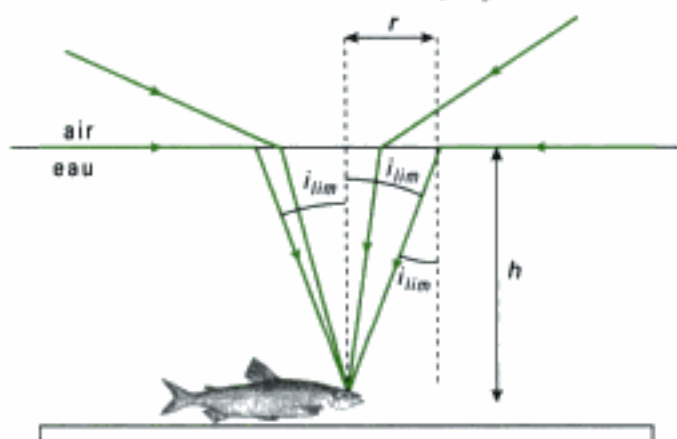
Un même point objet A donnant deux images différentes, très éloignées, ce dispositif, lorsque les incidences sont quelconques, ne peut donner une image de A.



Exercice 3

a) Par application du principe du retour inverse de la lumière, l'œil du poisson voit la zone de l'espace d'où il peut être vu.

Le poisson voit donc tout l'espace situé dans l'air au travers d'un cône de demi-angle au sommet égal à l'angle limite de réfraction. En dehors de ce cône, il y a réflexion totale (méthode 2).



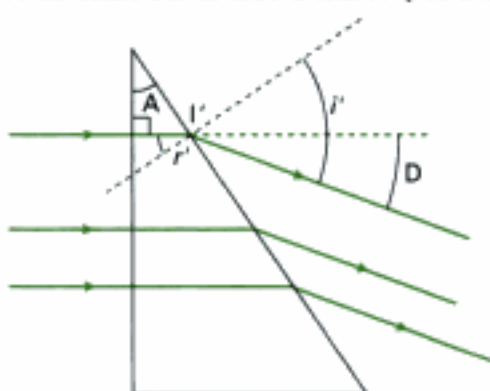
Comme $i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{1}{1,33} \right) = 49^\circ$, le poisson voit l'espace situé au-delà de la surface de l'eau sous un cône d'angle 98° , dont l'intersection avec la surface de l'eau est un disque de rayon r .

b) Avec $\tan(i_{\text{lim}}) = \frac{r}{h}$, on obtient $h = \frac{r}{\tan(i_{\text{lim}})} = 2,6 \text{ m}$.

Exercice 4

Ici, le faisceau est à incidence normale sur la face d'entrée (incidence nulle par rapport à la normale).

a)



b) Dans ce cas : $i' = nr' = nA$ et $D = i' - r' = nA - A = (n - 1)A$

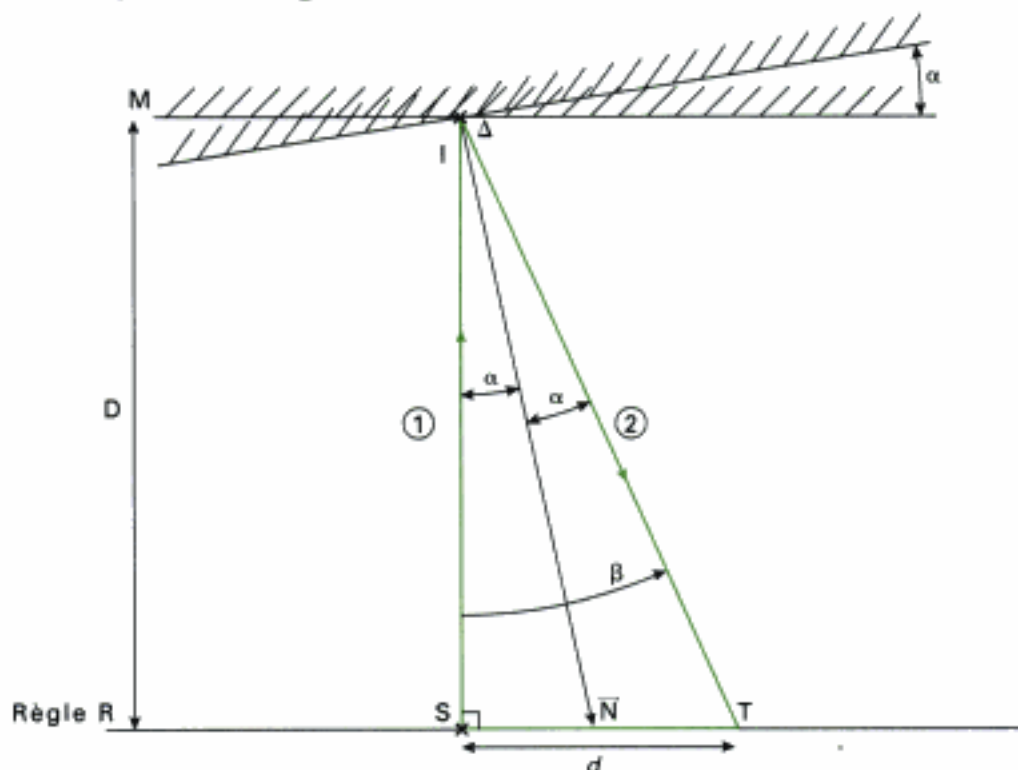
$$D = (n - 1)A$$

c) A.N. $D = (1,5 - 1) \times 2,9 \times 10^{-3} \text{ rad} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ rad}$ d'où : $D \approx 1,4 \times 10^{-3} \text{ rad}$

Exercices de niveau 2

Exercice 5

a) Au départ, le rayon incident ① revient sur lui-même (fig. 1).



Si le miroir tourne d'un angle α , la normale tourne aussi d'un angle α .

Le rayon incident fait donc l'angle d'incidence α avec la normale et il se réfléchit selon le rayon 2 qui fait l'angle α avec la normale (méthodes 1 et 2).

Pour une rotation du miroir d'un angle α , le rayon réfléchi tourne lui de $\beta = 2\alpha$.

b) La tache lumineuse se forme en T sur la règle.

On mesure la déviation du faisceau à l'aide de la distance d .

Dans le triangle rectangle IST on a :

$$\tan(2\alpha) = \frac{ST}{IS} = \frac{d}{D}$$

Si $d_{\min} = 1 \text{ mm}$, alors

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2} \text{Arc tan} \left(\frac{d_{\min}}{D} \right)$$

$$\text{A.N. : } \alpha_{\min} = \frac{1}{2} \text{Arc tan} \left(\frac{10^{-3}}{1} \right) = 5 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Soit aussi $\alpha_{\min} = 0,029^\circ$ et $\alpha_{\min} = 1,7'$.

On peut donc mettre en évidence de faibles rotations par une méthode optique simple.

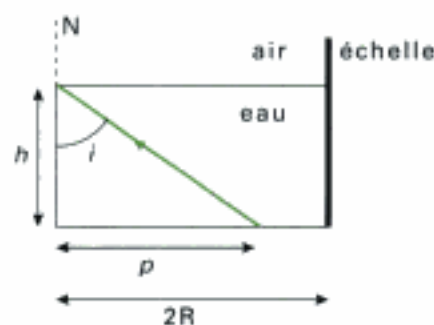
Exercice 6

L'observateur voit les rayons qui émergent de manière rasante, donc avec un angle de 90° par rapport à la normale. L'angle d'incidence i est donc l'angle limite de réfraction.

Sur le fond de la piscine, la profondeur p vue par l'observateur est $p = h \tan i = h \tan i_{\text{lim}}$.

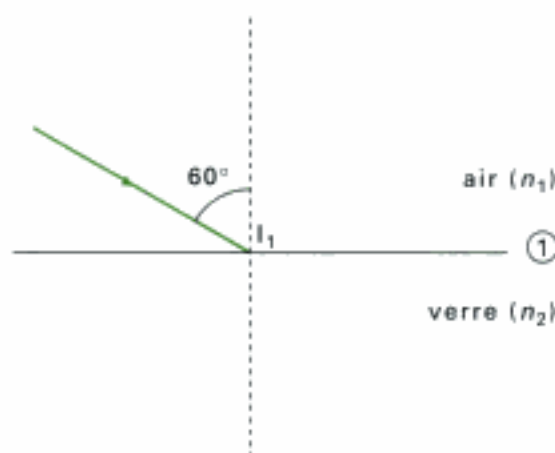
$$A.N. \quad p = h \tan \left(\text{Arc sin} \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 2,28 \text{ m}$$

Comme $p < 2R$, l'observateur ne peut voir le pied de l'échelle.



Exercice 7

- a) On se place dans le plan d'incidence pour représenter la situation physique dans le plan de la feuille (méthodes 1 et 2) :



Sur la face supérieure le rayon passe d'un milieu moins réfringent ($n_1 = 1$) à un milieu plus réfringent ($n_2 = 1,5$).

Ceci a deux conséquences : dans le second milieu le rayon se rapproche de la normale ; la loi de la réfraction est toujours vérifiée.

Nous posons $\theta_{i_1} = 60^\circ = \theta$ où l'indice i indique l'incidence et l'indice 1 l'interface considérée.

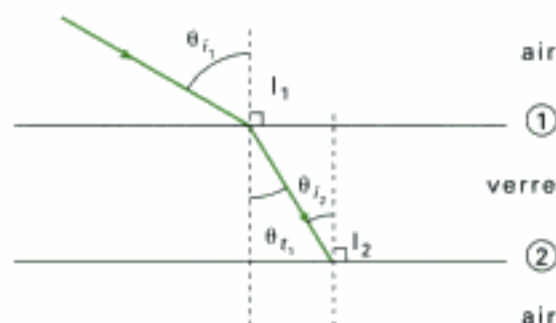
La loi de Snell-Descartes donne $n_1 \sin \theta_{i_1} = n_2 \sin \theta_{t_1}$

et donc :
$$\theta_{t_1} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{i_1} \right)$$

$$A.N. : \theta_{t_1} = \text{Arc sin} \left(\frac{1}{1,5} \sin 60 \right) = 35^\circ$$

Ainsi, $\theta_{t_1} < \theta_{i_1}$ conformément à nos prévisions.

b)



Les faces étant planes et parallèles, les deux plans d'incidence en I_1 et I_2 se confondent. La trajectoire des rayons est donc dans le plan de la feuille. Sur la deuxième face, la lumière passe d'un milieu plus réfringent (le verre) à un milieu moins réfringent (l'air).

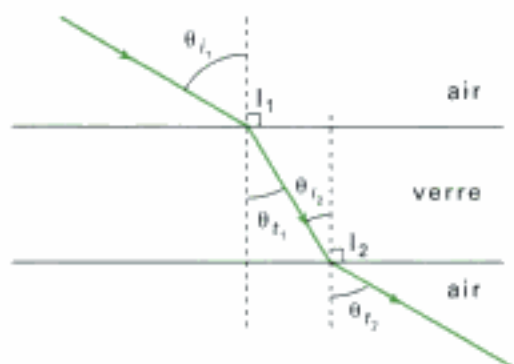
En conséquence, la loi de la réfraction peut ne pas être vérifiée, ce que nous testons en calculant l'angle de réfraction limite de l'interface verre-air : $i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \right) = \text{Arc sin} \frac{1}{1,5} = 41,8^\circ$.

On a ici $\theta_{i_2} = \theta_{i_1}$ puisque les faces sont parallèles.

Ainsi $\theta_{i_2} = 35^\circ < i_{\text{lim}} = 41,8^\circ$. Il y aura transmission en I_2 .

La loi de la réfraction permet de calculer $\theta_{t_2} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \sin \theta_{i_2} \right)$

A.N. : $\theta_{t_2} = 60^\circ$



L'angle d'émergence de la lame est égal à l'angle d'incidence.

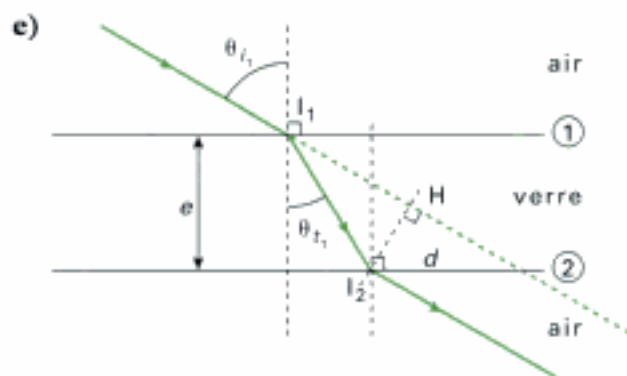
Le rayon émergent ressort parallèlement au rayon incident.

c) Oui, on pouvait trouver le résultat de la question 2 plus rapidement.

En remarquant que $\theta_{i_2} = \theta_{i_1}$, les milieux étant les mêmes de part et d'autre des interfaces situées en I_1 et I_2 , il suffisait d'appliquer la loi du retour inverse de la lumière en I_1 pour trouver que l'angle d'émergence était 60° .

d) **La déviation angulaire du rayon est nulle.**

Cela était prévisible : en I_1 le rayon se rapproche de la normale et en I_2 il s'écarte de la normale, de quantités identiques vue la symétrie des situations.



La déviation latérale est $d = I_2H$. L'angle $I_2\widehat{I_1}H = \theta_{i_1} - \theta_{t_1}$. Ainsi $d = I_1I_2 \cdot \sin(\theta_{i_1} - \theta_{t_1})$

avec $I_1I_2 = \frac{e}{\cos(\theta_{i_1})}$

donc :
$$d = e \frac{\sin(\theta_{i_1} - \theta_{t_1})}{\cos \theta_{i_1}} \quad (1)$$

A.N. : $d = 4,1 \text{ cm}$.

Si $\theta_{i_1} = \frac{\pi}{2}$ (cas de l'incidence rasante), $d = e$ puisque $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{t_1}\right) = \cos(\theta_{t_1})$.

La déviation latérale évolue entre 0 et ϵ . L'objet observé au travers de la lame n'est pas déformé mais **son image est décalée latéralement**.

On pourrait se servir des lames à faces parallèles pour dévier les rayons.

On préfère pour cela utiliser des prismes, comme nous le verrons.

$$f) \text{ On a } d = \frac{e \sin(\theta_{i_1} - \theta_{t_1})}{\cos(\theta_{t_1})} = \frac{e [\sin \theta_{i_1} \cos \theta_{t_1} - \sin \theta_{t_1} \cos \theta_{i_1}]}{\cos(\theta_{t_1})}$$

$$\text{donc } d = e \sin \theta_{i_1} \left[1 - \frac{\sin \theta_{t_1} \cos \theta_{i_1}}{\sin \theta_{i_1} \cos \theta_{t_1}} \right]$$

$$\text{Or, } n_1 \sin \theta_{i_1} = n_2 \sin \theta_{t_1} \text{ donc } \sin \theta_{t_1} = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{i_1}$$

$$\text{Ainsi : } d = e \sin \theta_{i_1} \left[1 - \frac{n_1}{n_2} \frac{\sin \theta_{i_1} \cos \theta_{i_1}}{\sin \theta_{i_1} \cos \theta_{t_1}} \right]$$

$$\text{donc on a bien : } d = e \sin \theta_{i_1} \left[1 - \frac{n_1 \cos \theta_{i_1}}{n_2 \cos \theta_{t_1}} \right]$$

Pour avoir d proportionnel à e et θ_{i_1} , il suffit de prendre des petits angles d'incidence. Dans ce cas, $\frac{\cos \theta_{t_1}}{\cos \theta_{i_1}} = 1 \Rightarrow d = e \theta_{i_1} \left[1 - \frac{n_1}{n_2} \right]$

On peut donc se servir de la lame à faces parallèles pour balayer une surface avec un laser. La relation $d = k e \theta_{i_1}$, $k = \text{cte}$, permet de créer le balayage d proportionnel à θ_{i_1} par un mouvement de rotation de la lame autour d'un axe passant par I_1 et appartenant à la face d'entrée de la lame.

g) La relation (1) devient :

$$d = e \left(\frac{\sin \theta_{i_1} \cos \theta_{t_1} - \sin \theta_{t_1} \cos \theta_{i_1}}{\cos \theta_{t_1}} \right)$$

$$d = e \left(\sin \theta_{i_1} - \frac{\sin \theta_{t_1}}{\cos \theta_{t_1}} \cos \theta_{i_1} \right)$$

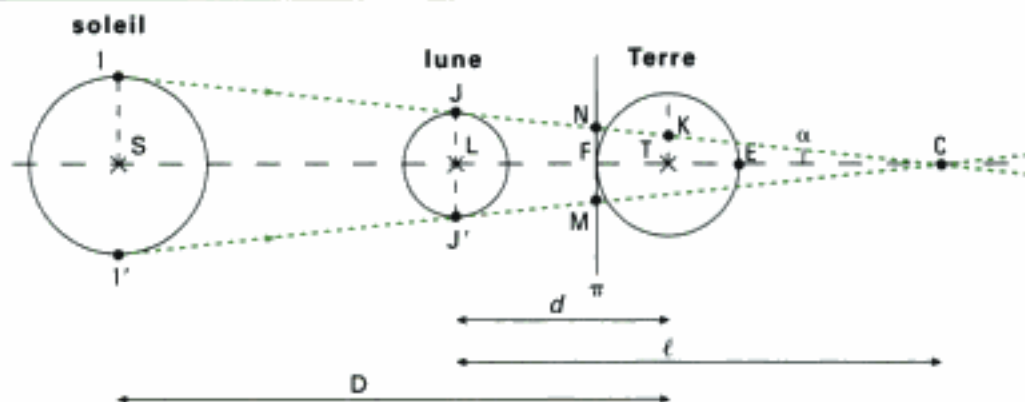
$$\text{or } \cos \theta_{t_1} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{t_1}} \text{ et } \sin \theta_{t_1} = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{i_1}$$

$$\text{donc } \cos \theta_{t_1} = \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_{i_1}}}{n_2}$$

$$\text{Ainsi } d = e \left(\sin \theta_{i_1} - \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{i_1} \cdot \cos \theta_{i_1} \cdot \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_{i_1}}} \right)$$

$$d = e \sin \theta_{i_1} \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_{i_1}} - n_1 \cos \theta_{i_1}}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_{i_1}}}$$

Exercice 8



a) On trace le cône d'ombre portée de la lune par l'intermédiaire des rayons extrêmes IJC et I'J'C. C est le sommet de ce cône dont la longueur ℓ est LC.

Dans les triangles CIS et CJL on a : $\tan \alpha = \frac{IS}{\ell + D - d} = \frac{JL}{\ell}$

Or, $IS = R_s$ et $JL = R_L$

Ainsi, $\ell R_s = R_L \ell + R_L(D - d) \Leftrightarrow \ell = \frac{R_L(D - d)}{R_s - R_L}$

A.N. : $\ell = \frac{1,76 \times 10^6 (150 \times 10^9 - 3,57 \times 10^8)}{6,96 \times 10^8 - 1,76 \times 10^6} \approx 3,79 \times 10^8 \text{ m}$

$\ell \approx 3,79 \times 10^8 \text{ m}$

Formons $\frac{\ell}{LE} = \frac{\ell}{d + R_T} = \frac{3,79 \times 10^8}{3,57 \times 10^8 + 6,37 \times 10^6} = 1,04 > 1$

donc $\ell > LE$. **Le point C est au-delà du point E.**

b) Comme $\tan \alpha = \frac{NF}{FC} = \frac{r}{\ell - d + R_T}$ on a $r = (\ell - d + R_T) \tan \alpha$ (1)

avec $\tan \alpha = \frac{JL}{\ell} = \frac{R_L}{\frac{R_L(D - d)}{R_s - R_L}} = \frac{R_s - R_L}{D - d}$ (2)

or $\ell - d + R_T = \frac{R_L(D - d)}{R_s - R_L} - d + R_T = \frac{R_L D - R_L d - d R_s + d R_L + R_s R_T - R_T R_L}{R_s - R_L}$

donc $\ell - d + R_T = \frac{R_L D - d R_s + R_s R_T - R_T R_L}{R_s - R_L}$ (3)

(2) et (3) reportées dans (1) donnent : $r = \frac{R_L D - d R_s + R_s R_T - R_T R_L}{D - d}$

A.N. : **Le rayon du disque MN est $r \approx 133 \text{ km}$.**

La calotte sphérique réellement découpée sur la Terre a un rayon de l'ordre de 133 km.

Exercice 9



L'observateur voit le point A_1 en A_2 car notre cerveau interprète les images en prenant comme a priori le fait que la lumière se propage en ligne droite. La lumière venant de IO, le cerveau imagine qu'elle est partie de A_2 (fig 1).

a) On a $\widehat{HA_1 I} = i_1$ et $\widehat{HA_2 I} = i_2$, de sorte que $HI = HA_1 \tan i_1$ et $HI = HA_2 \tan i_2$
donc $HA_1 \tan i_1 = HA_2 \tan i_2$ (1)

La loi de la réfraction donne $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (2) et en divisant (1) par (2) on obtient :

$$\frac{HA_1}{n_1 \cos i_1} = \frac{HA_2}{n_2 \cos i_2}$$

Si les angles i_1 et i_2 sont petits puisque IO est proche de la verticale, alors $\cos i_1 = 1$ et $\cos i_2 = 1$.

Ainsi $\frac{HA_1}{n_1} = \frac{HA_2}{n_2}$ soit $HA_2 = \frac{n_2}{n_1} HA_1$

Comme ici $n_1 > n_2$ on a : $HA_1 > HA_2$. Ceci explique que la pêche au harpon, en dehors de la verticale, est hasardeuse...

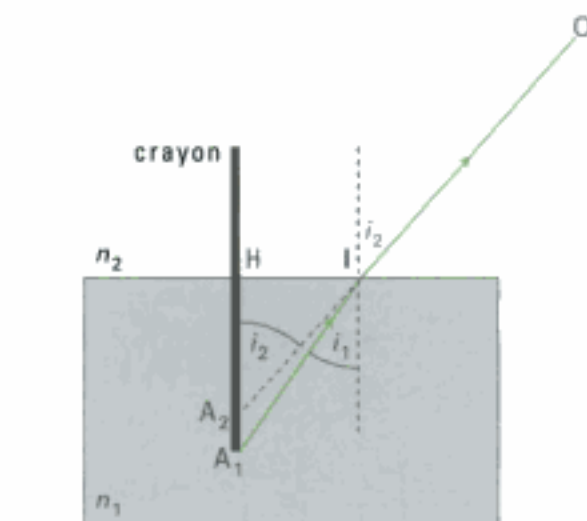
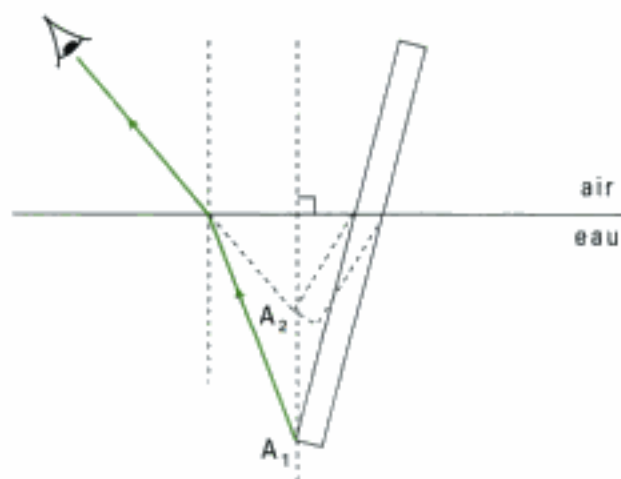


Fig. 1

b)
$$HA_1 = \frac{n_1}{n_2} HA_2 = \frac{1,33}{1} \times 2 = 2,66 \text{ m.}$$

c) Les réponses aux questions 1 et 2 expliquent l'observation faite à la figure 5 du cours.



La partie immergée du bâton semble brisée et plus courte pour un observateur hors de l'eau.

d) Comme $n_{\text{air}} = 1,00$ on a : $\lambda_{\text{air}} = \lambda_{\text{vide}} = cT$

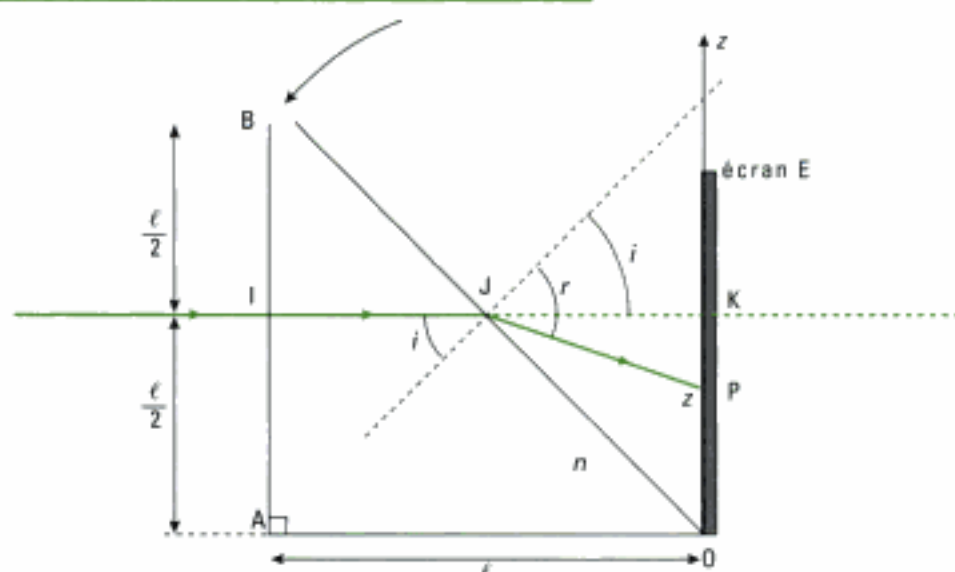
Or $\lambda_{\text{eau}} = v \times T$ avec $n_{\text{eau}} = \frac{c}{v}$ donc
$$\lambda_{\text{eau}} = \frac{cT}{n_{\text{eau}}} = \frac{\lambda_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} = \frac{633}{1,33} = 475 \text{ nm}$$

e) Dans l'air la longueur d'onde 475 nm correspond à la couleur bleue.

f) Dans l'eau la tache est encore de couleur rouge car l'œil est sensible à la fréquence et non à la longueur d'onde.

Exercice 10

a)



b) En I, l'incidence étant normale, le rayon incident n'est pas dévié.

 L'angle d'incidence en J est 45° . L'énoncé dit que le rayon est transmis en J, donc $i \leq i_{\text{lim}} = \arcsin \frac{1}{n}$

$$\text{d'où } \sin i \leq \frac{1}{n} \text{ et } \boxed{n \leq \frac{1}{\sin i}} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

On a donc $n \leq 1,414$.

c) En J on a $n \sin i = \sin r$ soit $n = \frac{\sin r}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \sin r$ ou encore $n = \sqrt{2} \sin r$.

Calculons r grâce aux données fournies par la tache lumineuse sur l'écran E.

$$\text{Dans le triangle JKP, } \tan(r - i) = \frac{KP}{JK} = \frac{\frac{\ell}{2} - z}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2\left(\frac{\ell}{2} - z\right)}{\ell}$$

$$\text{Ainsi, } r = i + \text{Arc tan} \left(\frac{\ell - 2z}{\ell} \right)$$

$$\text{et donc } \boxed{n = \sqrt{2} \sin \left(i + \text{Arc tan} \left(\frac{\ell - 2z}{\ell} \right) \right)}$$

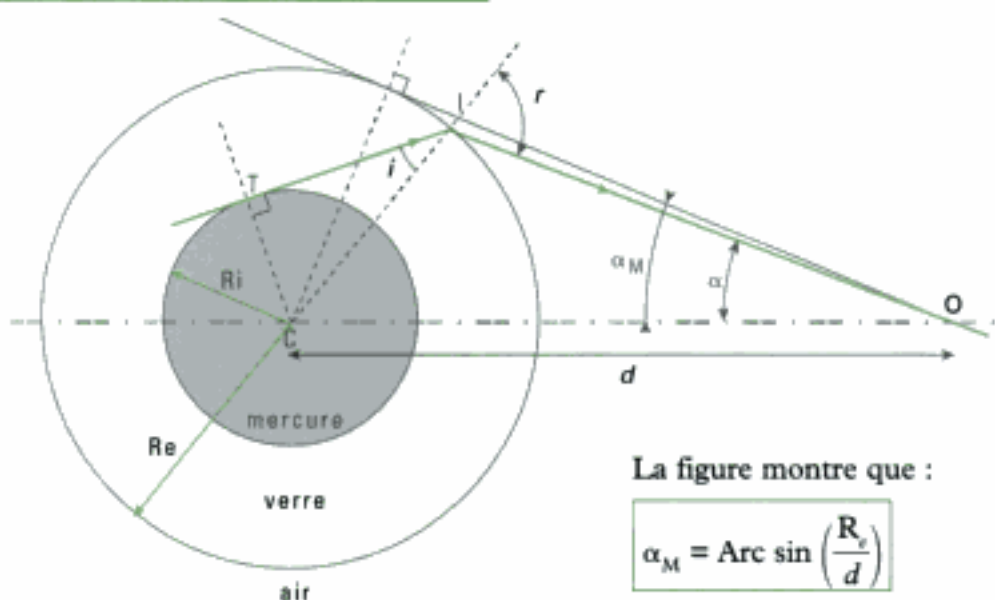
$$\text{ou encore } n = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \text{Arc tan} \left(\frac{\ell - 2z}{\ell} \right) \right)$$

d) A.N. : $n = 1,36$

Ce liquide peut être de l'éthanol.


Exercice 11

a)



La figure montre que :

$$\alpha_M = \text{Arc sin} \left(\frac{R_e}{d} \right)$$

- b)  Nous cherchons le plus grand angle α tel que la colonne de mercure envoie de la lumière au point O. Par voie de conséquence nous cherchons aussi le plus grand angle r et donc le plus grand angle i qui remplissent cette même condition.
En I, le rayon qui donne le plus grand angle i est IT qui se confond avec la tangente au cercle de rayon R_i .

En I nous avons $n \sin i = \sin r$

Or dans le triangle TCI on a $\sin i = \frac{R_i}{R_e}$

On en déduit que $\sin r = n \frac{R_i}{R_e}$

La relation du sinus et de l'angle opposé dans le triangle CIO (non rectangle) donne :

$$\frac{\sin \alpha}{CI} = \frac{\sin (\pi - r)}{CO}$$

$$\text{soit } \sin \alpha = \frac{CI \sin r}{CO} = \frac{R_e}{d} \cdot n \frac{R_i}{R_e} = \frac{n R_i}{d}$$

Alors,
$$\alpha = \text{Arc sin} \left(\frac{n R_i}{d} \right)$$

c) Le mercure semblera occuper tout le tube si $\alpha = \alpha_M$

$$\text{soit } \frac{n R_i}{d} = \frac{R_e}{d} \text{ donc } n R_i = R_e$$

d) On trouve $\alpha_M = 0,012 \text{ rad}$ soit $0,68^\circ$ ou $41'$

$\alpha = 0,002 \text{ rad}$ soit $0,138^\circ$ ou $8'$

Pour que le mercure semble occuper tout le tube il faut que $R_e = n R_i$ soit $R_e = 0,6 \text{ mm}$.

L'épaisseur du tube est $\frac{2}{10}$ de mm, ce qui le rend très cassant.

Exercice 12

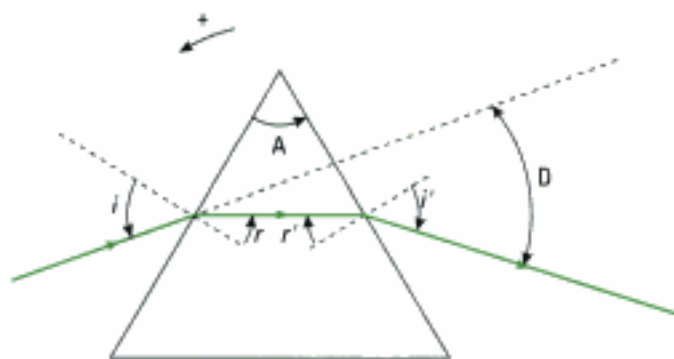
a) Si le prisme est plongé dans l'air on a, d'après la loi de Snell-Descartes :

$$\sin i = n \sin r$$

ici i et r sont positifs

$$\sin i' = n \sin r'$$

ici i' et r' sont négatifs (fig. 1)



⚠ Pour faciliter le traitement des questions ultérieures (train de trois prismes), les angles sont orientés. Nous devons rétablir les relations du prisme avec cette hypothèse indiquée dans l'énoncé.

On a : $i = |i| > 0$; $A = |A| > 0$; $r = |r| > 0$
 $D = |D| > 0$; $r' = -|r'| < 0$; $i' = -|i'| < 0$

⚠ D est choisie dans un sens inhabituel.

La relation classique $A = r + r'$ avec les angles non orientés devient ainsi $A = r - r'$ (1) avec les angles orientés.

b) On peut encore appliquer l'addition des déviations (méthode 3) : $D = D_1 + D_1'$ (fig. 3).

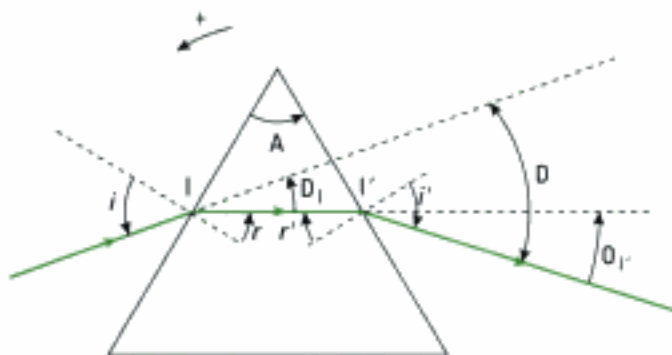


Fig. 3

Ainsi $D_1 = i - r$ (appliquer un analogue à la relation de Chasles).

De même $D_1' = -i' + r'$ d'où $D = D_1 + D_1' = i - r - i' + r' = i - i' + r' - r$

ce qui, compte tenu de (1) donne $D = i - i' - A$

c) La déviation totale est la somme de la déviation due au prisme ① et de la déviation due au ②. On obtient, $D = D_1 + D_2$ qui s'écrit immédiatement $D = (i - i_1 - A) + (i_2 - i' - A)$ (fig. 4).

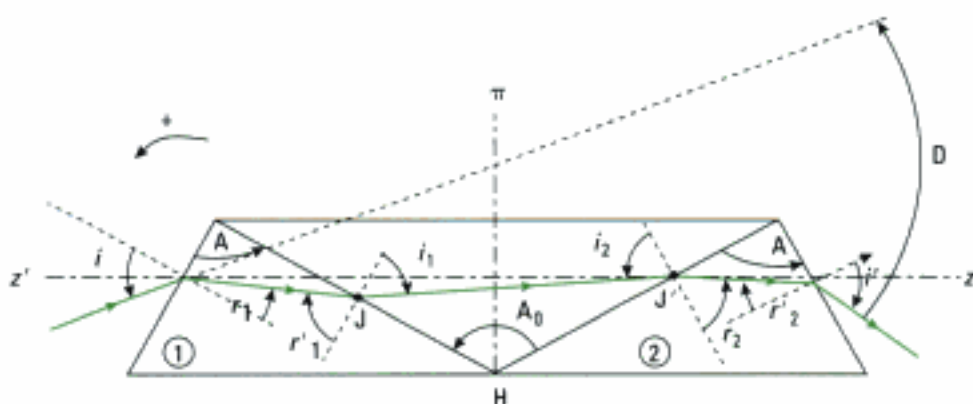


Fig. 4

Les angles i_1 et i_2 sont bien sûr liés par :

$$A_0 + \left(\frac{\pi}{2} + i_1\right) + \frac{\pi}{2} - i_2 = \pi \text{ dans le triangle } JHJ'$$

On a donc $A_0 = i_2 - i_1$ et $D = i - i' + A_0 - 2A$ d'après (1)

Comme $A = \frac{\pi}{2}$, on a aussi $D = i - i' + A_0 - \pi$

i)  Les rayons incidents sur le prisme (1) et émergents du prisme (2) sont symétriques par rapport à π et le dispositif est lui-même symétrique par rapport à π .

On en déduit que le rayon **JJ'** est symétrique par rapport à π , donc qu'il lui est orthogonal. Le rayon JJ' peut être tracé ; il est parallèle à chacune des bases considérées.

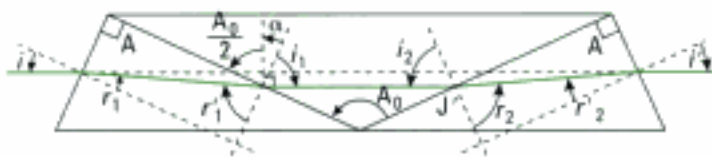


Fig. 5

ii) S'il en est ainsi, $D = i - i' + A_0 - \pi = 0$ avec $i = -i' \Rightarrow i = \frac{\pi}{2} - \frac{A_0}{2}$.

 Pour déterminer A_0 , on remarque que A_0 est lié à i par l'équation précédente, que i est lié à r_1 , lié lui-même à r_1' , qui est lui-même fonction de i_1 . Si on lie i_1 et A_0 par une seconde relation $A_0(i_1)$, on a alors deux équations à deux inconnues que l'on résout en A_0 .

$$\bullet \sin i = n \sin r \text{ soit } \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_0}{2} \right) = n \sin r_1 = \cos \left(\frac{A_0}{2} \right) \quad (1)$$

$$\bullet A = r_1 - r_1' \Leftrightarrow r_1 = A + r_1' = \frac{\pi}{2} + r_1' \quad (2)$$

(1) et (2) donnent $n \sin \left(\frac{\pi}{2} + r_1' \right) = n \cos r_1' = \cos \left(\frac{A_0}{2} \right)$, comme $n \cos r_1' = n \sqrt{1 - \sin^2 r_1'}$ et

$$\text{que } \sin r_1' = \frac{n_0}{n} \sin i_1 \text{ on a : } n \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2} \sin^2 i_1} = \cos \left(\frac{A_0}{2} \right).$$

Or, en J nous pouvons écrire (fig. 5) :

$$\alpha - i_1 = \frac{\pi}{2} = \alpha + \frac{A_0}{2} \text{ donc } i_1 = -\frac{A_0}{2}$$

$$\text{On a alors } n \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2} \sin^2 \left(\frac{A_0}{2} \right)} = \cos \left(\frac{A_0}{2} \right)$$

$$\text{soit, } n^2 - n_0^2 \sin^2 \left(\frac{A_0}{2} \right) = \cos^2 \left(\frac{A_0}{2} \right) \\ = 1 - \sin^2 \left(\frac{A_0}{2} \right)$$

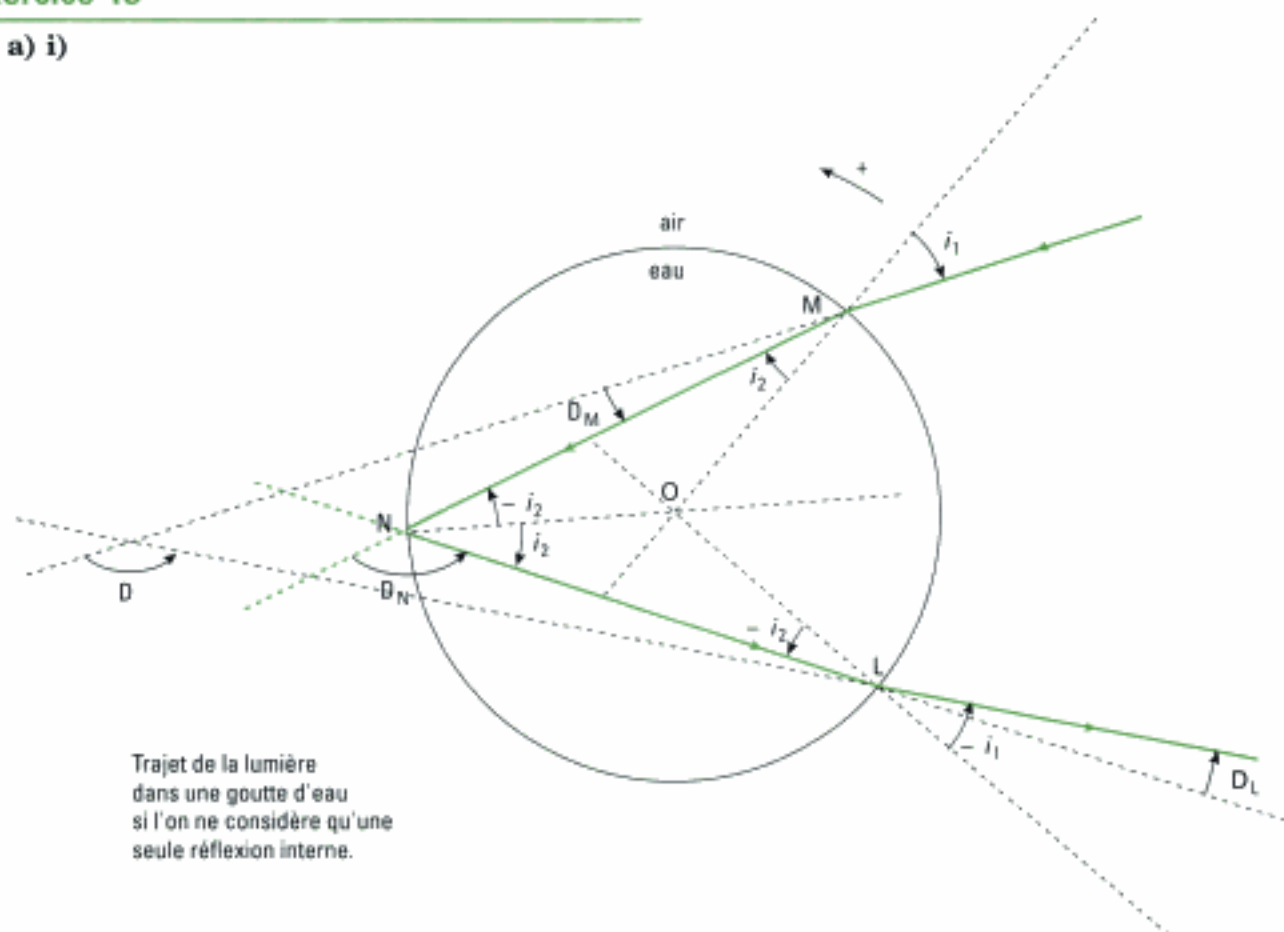
ou encore :

$$\sin^2 \left(\frac{A_0}{2} \right) (n_0^2 - 1) = n^2 - 1 \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A_0}{2} = \frac{n^2 - 1}{n_0^2 - 1} \text{ soit } A_0 = 2 \text{ Arc sin } \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n_0^2 - 1}}$$

iii) A.N. : $A_0 = 122^\circ$.

Exercice 13

a) i)



Trajet de la lumière
dans une goutte d'eau
si l'on ne considère qu'une
seule réflexion interne.

- ii)  On remarque que les triangles MON et NOL sont isocèles.
De plus, en N, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Ainsi, l'angle de sortie a pour valeur $|i_1|$.

La déviation totale est la somme de la déviation en M, de celle en N et de celle en L.

L'orientation des angles étant celle du sens trigonométrique,

$$\text{on a } D_M = -(i_1 - i_2) = -i_1 + i_2$$

$$D_N = \pi + 2i_2$$

$$D_L = -i_1 + i_2 \text{ (méthode 3).}$$

$$\text{La déviation totale est donc } D = -i_1 + i_2 + \pi + 2i_2 - i_1 + i_2$$

$$D = \pi - 2i_1 + 4i_2.$$

$$\text{Or } \sin i_1 = n \sin i_2 \Leftrightarrow i_2 = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin i_1}{n} \right)$$

$$\text{Ainsi } D = \pi - 2i_1 + 4 \text{ Arc sin} \left(\frac{\sin i_1}{n} \right)$$

iii) Vérifions qu'il existe un extremum quand $D'(i_1) = 0$

$$D'(i_1) = -2 + 4 \frac{\cos i_1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}}}$$

$$D'(i_1) = -2 + 4 \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}$$

$$\text{Cette dérivée est nulle si } \frac{2 \cos i_{1m}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{1m}}} = 1$$

soit encore $4 \cos^2(i_{1m}) = n^2 - \sin^2(i_{1m}) = n^2 - 1 + \cos^2(i_{1m})$

On obtient donc $3 \cos^2(i_{1m}) = n^2 - 1$, soit

$$|i_{1m}| = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

A.N. $|i_{1m}| = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{1,33^2 - 1}{3}} \approx -59^\circ$.

donc $i_{1m} = -59^\circ$.

iv)  Pour montrer que cet extremum est un minimum, il faut montrer que la dérivée seconde de D par rapport à i est positive au voisinage de $i_1 = i_{1m}$.

En dérivant on obtient, après simplification

$$D''(i) = \frac{-4 \sin i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} + \frac{4 \cos^2 i_1}{(n^2 - \sin^2 i_1)^{3/2}} \sin i_1$$

qui se réordonne en :

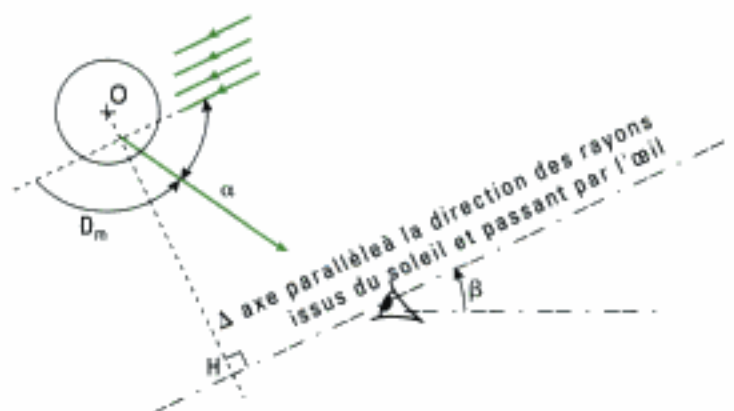
$$D''(i) = \frac{-4 \sin i_1 (n^2 - 1)}{(n^2 - 1 + \cos^2 i_1)^{3/2}}$$

Or, $n^2 - 1 > 0$ puisque $n > 1$; $\sin i_1 < 0$ puisque $i_1 \in \left[0 ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et le dénominateur est positif.

On a donc bien $D''(i) > 0$; l'extremum est un minimum.

A.N. : $D_m = D(i_m) \approx 138^\circ$.

v)



Les gouttes sont éclairées par un faisceau de lumière parallèle. Les angles d'incidences varient donc, comme les angles d'émergence et l'œil reçoit des rayons provenant de toutes les directions. Au voisinage du minimum, nombreux sont les rayons à vérifier la condition d'émergence. Il en résulte qu'au voisinage de D_m , l'œil voit une accumulation de lumière.

La condition d'observation est donnée dans un plan contenant la direction des rayons du soleil, le centre de la goutte, et l'œil et elle s'exprime par la constance de cet angle D_m .

Ainsi, tout plan contenant Δ , qui est un axe de révolution du système, peut contenir des gouttes vérifiant la condition sur D_m . **Ces gouttes se trouvent donc sur un arc de cercle de rayon R_0 centré sur Δ .**

vi) On constate que l'angle α entre les rayons du soleil et le rayon émergent a pour valeur $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

Si le soleil a cette hauteur $\beta \geq \alpha$ sur l'horizon alors, l'arc-en-ciel est projeté dans le ciel et ne peut être vu que d'avion.

Bien entendu, à midi $\beta = \frac{\pi}{2}$, et cette dernière condition est vérifiée.

vii) **Les droites Δ associées à ces deux observateurs n'étant pas confondues, ils ne voient pas la même image** de l'arc-en-ciel (le pied de l'arc n'est pas vu au même endroit).

Inutile donc de se déplacer pour atteindre le pied de l'arc-en-ciel !

b) i) Le spectre visible s'étend de 380 nm à 780 nm environ.

ii) La déviation $D = \pi - 2i_1 + 4 \text{Arc sin} \left(\frac{\sin i_1}{n} \right)$ dépend de l'indice de la goutte d'eau.



Or, cet indice dépend de la fréquence, donc de la longueur d'onde car l'eau est un milieu dispersif (cf. chap. 1).
La déviation D dépend donc de la longueur d'onde λ et les gouttes d'eau vont « décomposer » la lumière blanche pour donner les couleurs de l'arc-en-ciel.

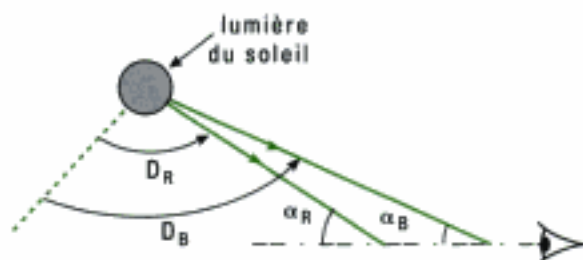
iii) $i_{1mB} = -\text{Arc cos} \sqrt{\frac{n_B^2 - 1}{3}}$ et $i_{1mR} = -\text{Arc cos} \sqrt{\frac{n_R^2 - 1}{3}}$

A.N. : $i_{1mB} = -59,1^\circ$; $i_{1mR} = -59,5^\circ$

$D_{mB} = 138,5^\circ$ et $D_{mR} = 137,6^\circ$

$\Delta D = D_{mB} - D_{mR} = 0,9^\circ$; comme pour le prisme, la radiation bleue est plus déviée que la rouge.

iii)



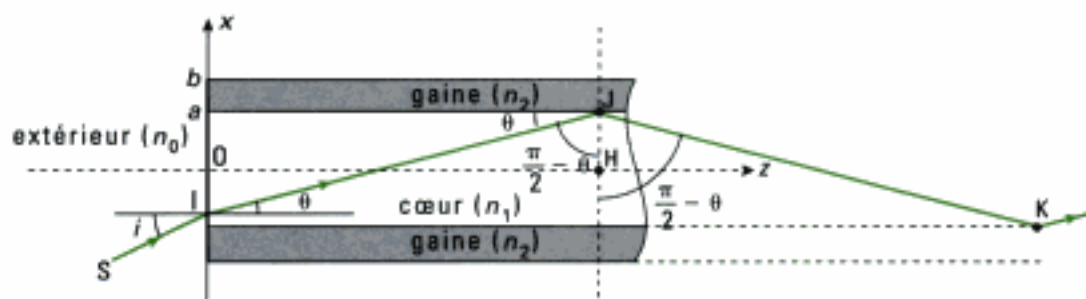
Comme on le voit sur le dessin, $\alpha_B < \alpha_R$,
l'observateur voit le rouge à l'extérieur
de l'arc et le bleu à l'intérieur.

Exercice 14

a) Le trajet sera plan si le rayon réfléchi sur la face a revient dans le plan d'incidence. Pour cela, il faut que le plan, tangent au point d'incidence sur la face a, soit perpendiculaire au rayon incident. Ceci ne se produit que si l'axe de la fibre est dans le plan d'incidence.

Ce plan d'incidence étant supposé le même pour toute la propagation, il en est de même en I :
le rayon incident et la normale, qui définissent le plan d'incidence, doivent contenir l'axe de la fibre.

b) Pour que le rayon reste dans le cœur il faut que la réflexion soit totale en J (méthode 2).



Or, $\widehat{IJH} = \frac{\pi}{2} - \theta$. On doit donc avoir $\frac{\pi}{2} - \theta > i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$

Ainsi, $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) > \sin \left(\text{Arc sin} \frac{n_2}{n_1} \right) = \frac{n_2}{n_1}$ donc $\cos \theta > \frac{n_2}{n_1}$ (1)

Or $n_0 \sin i = n_1 \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta = n_0 \frac{\sin i}{n_1}$

$$(1) \text{ donne : } \sqrt{1 - \sin^2 \theta} > \frac{n_2}{n_1} \text{ soit } \sqrt{1 - n_0 \frac{\sin^2 i}{n_1^2}} > \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 i}{n_1^2} > \frac{n_2^2}{n_1^2} \Leftrightarrow \boxed{\sin i < \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}} \text{ avec } i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Il existe donc une valeur minimale de i , qui vérifie $\boxed{\sin i_a = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}}$ pour laquelle le rayon subit la réflexion totale dans la gaine. Au-delà de cet angle, ce ne sera plus le cas.

c) O.N. = $n_0 \sin i_a$.

Il vient immédiatement O.N. = $\frac{n_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

$$\boxed{\text{O.N.} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

d) $n_1 = 1,456$ silice,

$i_a = 0,37 \text{ rad ou } 21^\circ$ $n_2 = 1,410$ silicone **O.N. $\approx 0,36$**

$\left. \begin{array}{l} n_1 = 3,9 \\ n_2 = 3,0 \end{array} \right\}$ arséniure de gallium. La valeur de $\sin i_a$ est supérieure à 1 ! ; i_a peut donc prendre la valeur $\frac{\pi}{2}$. **Il n'y a pas de limite à l'angle d'acceptance de la fibre.** On a aussi **O.N. = 1.**

e) $\phi_2 = 10 \% \times \phi_1$ donc $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 10$

on obtient donc (AdB/km) = $\frac{10}{50} \log_{10}(10) = 0,2 \text{ dB/km}$

(AdB/km) = 0,2 dB/km

f) À l'extrémité, il faut être **capable d'identifier à quel objet correspond l'image** donnée par chaque fibre. Soit les fibres possèdent un alignement qui donne une correspondance objet-image dans l'espace, soit il faut indexer les fibres puis recomposer l'image.

Enfin, il faut que l'extrémité de **l'endoscope soit placé très près de la zone à observer**, ce qui peut être gênant. Récemment, les endoscopes ont été améliorés grâce à un micro-objectif à forte profondeur de champ, ce qui réduit le dernier défaut cité.

Formation des images

Introduction

Dans ce chapitre seront abordées les notions de base permettant de répondre à ces questions fondamentales, par des raisonnements qualitatifs et quantitatifs. Au cœur de ces réponses nous trouverons de manière récurrente « les conditions de Gauss », qui sont les bases de l'optique instrumentale.

Plan du chapitre 3

A. Notion d'image	70
B. Notion de point objet et de point image en référence à un système optique	70
C. Stigmatisme rigoureux	73
D. Les systèmes centrés	77
E. Aplanétisme rigoureux	77
F. Stigmatisme approché.....	77
G. Les conditions de Gauss.....	79
H. Application au dioptre plan	82
I. Aberrations des systèmes optiques.....	84
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre.....	88
Énoncés des exercices	91
Solutions des exercices	93

A. Notion d'image

La notion d'image est liée à l'observation visuelle à des fins d'information. Par l'intermédiaire de la lumière l'œil reçoit sur la rétine des informations qu'il transmet au cerveau sous forme de signaux électriques. A partir d'interactions neurobiologiques complexes, où interfèrent des notions propres à chaque individu, notamment la notion d'apprentissage, le cerveau interprète cette observation comme une image. Il s'agit évidemment d'une image mentale, qui ne ressemble en rien à l'image au sens classique, perçue comme une duplication reconnaissable de ce qui génère l'information lumineuse reçue et que nous appelons habituellement l'objet.

Nous pouvons nous convaincre de la nature mentale de l'image en constatant qu'en fermant les yeux nous continuons à voir cette image mentale, et que d'autres images, comme celles de nos rêves, n'ont pas de support objet palpable. La représentation de la vision qui consiste à comparer l'œil à un appareil photographique, et le cerveau à un lecteur d'images rétiniennes passif, est donc erronée. Les illusions d'optique en sont l'expression la plus évidente. Dans l'exemple de la figure 1, les segments compris entre les pointes des flèches ont-ils la même longueur ?

Le cerveau par l'intermédiaire de l'image mentale répond non. Le double décimètre montre que oui. Nous mettons ici en évidence le fait que la perception visuelle des images utilise l'interprétation active des données.



Fig. 1
Illusion d'optique

Definition 1

Une image est le résultat d'une synthèse d'informations multiples réalisée par le cerveau.

La vision humaine a ses limites physiques, surtout liées à l'œil : impossibilité de voir des détails très petits, proches ou lointains par exemple, ce qui fait que nous utilisons des systèmes optiques (microscope, lunette) qui vont donner de ces détails des images optiques ressemblantes et plus riches d'information qu'en vision directe. Nous retrouvons ici la notion classique d'image optique.

Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à cette image optique que nous nommerons simplement « image ».

Definition 2

L'image optique, ou image, est la reproduction que donne un système optique d'un objet lumineux.

B. Notion de point objet et de point image en référence à un système optique

B.1. Système optique

Definition 3

Un système optique (S) est un ensemble de milieux homogènes et transparents séparés par des dioptres ou par des miroirs.

Un système optique est dit *dioptrique* s'il ne comporte que des dioptres, *catoptrique* s'il ne comporte que des miroirs et *catadioptrique* s'il comporte des dioptres et au moins un miroir.

Dans la suite de ce chapitre, sauf indication contraire, le système optique (S) désignera un système dioptrique.

Les milieux d'entrée et de sortie, c'est à dire les milieux qui baignent les deux faces, sont supposés homogènes de sorte que les rayons lumineux s'y propagent en ligne droite. Les indices des milieux d'entrée et de sortie sont supposés égaux, ce qui est généralement le cas.

• **Convention d'orientation de l'espace**

Nous choisissons comme sens positif le sens réel de parcours de la lumière que nous dirigeons conventionnellement de la gauche vers la droite du dessin (fig. 2). Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique.

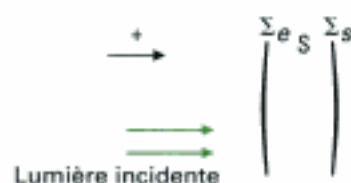


Fig. 2
Représentation d'un système optique et orientation de l'espace

B.2. Rayon incident et rayon émergent, face d'entrée et face de sortie du système optique

Définition 4

Un rayon incident est un rayon qui se dirige vers (S), dans le sens de propagation de la lumière.

Définition 5

Un rayon émergent est un rayon qui s'éloigne de (S), dans le sens de propagation de la lumière.

Un système optique est limité par une face d'entrée Σ_e située du côté des rayons incidents et par une face de sortie Σ_s située du côté des rayons émergents (fig. 2).

B.3. Point objet réel ou virtuel, point image réel ou virtuel

Considérons un système optique représenté sommairement par ses deux faces Σ_e et Σ_s . Le système étant supposé dioptrique, un faisceau lumineux incident pénètre par la face d'entrée et ressort par sa face de sortie.

Définition 6

Si le faisceau incident est un cône¹ de sommet A, le point A est un point objet pour le système optique. Deux cas peuvent se présenter, le faisceau conique incident peut être :

- divergent, dans ce cas le point objet A est dit réel (fig. 3) ;
- convergent, dans ce cas le point objet A est dit virtuel (fig. 4).

1. Le cône le plus général n'est pas forcément généré par une surface de révolution ; ainsi, il ne possède pas obligatoirement un axe de symétrie.

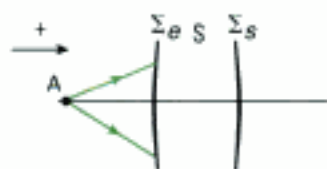


Fig. 3
Point objet réel

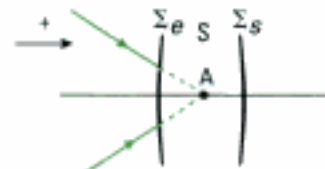


Fig. 4
Point objet virtuel

Le point objet réel émet des rayons lumineux alors que le point objet virtuel n'émet pas de rayons ; il est le point de convergence des rayons. Dans ce dernier cas (fig. 4) nous comprenons que le faisceau incident ne peut converger en A puisque le système (S) modifie le parcours de ces rayons dès la face d'entrée. Pour indiquer la virtualité de ce parcours de la lumière dans le sys-

1. Il faut se souvenir que si la lumière traverse une suite de milieux homogènes, alors, chaque rayon est une suite continue de parties rectilignes suivies effectivement par la lumière. Nous représentons toujours ces parties en traits pleins.

2. Nous retrouvons ici une modélisation du même ordre que celle du point matériel en mécanique.

tème (S), et la virtualité de A, nous traçons en pointillés¹ le prolongement des rayons incidents dans le système optique (S).

Propriété 1

Le point A est un point objet pour le système s'il se trouve à l'intersection de rayons lumineux incidents sur le système ou à l'intersection de leurs prolongements.

Remarque : le point objet est donc une notion idéale² puisque le point source dans la réalité a toujours une étendue spatiale. Cependant, cette notion de source étendue est liée au récepteur qui observe le point source. Ainsi, l'œil peut séparer deux points écartés d'au moins trois minutes d'angle. L'ensemble des points sources vus sous un angle inférieur à 3' sera donc considéré comme un point objet.

Définition 7

Si le faisceau émergent est un cône de sommet A', le point A' est un point image pour le système optique. Deux cas peuvent se présenter, le faisceau conique émergent peut être :

- divergent, dans ce cas le point image A' est dit virtuel (fig. 5) ;
- convergent, dans ce cas le point image A' est dit réel (fig. 6).

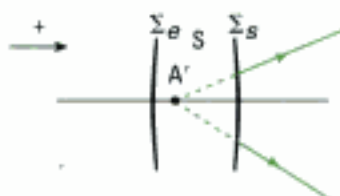


Fig. 5

Point image virtuelle

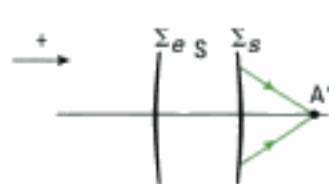


Fig. 6

Point image réelle

Là aussi, le point A' ne peut en pratique émettre les rayons émergents tracés dans la figure 5 : il s'agit d'un point virtuel.

Propriété 2

Le point A' est un point image pour le système s'il se trouve à l'intersection de rayons lumineux émergents du système ou à l'intersection de leur prolongement.

B.4. Objet et image

Définition 8

Un objet est un ensemble étendu de points objets.
Une image est un ensemble étendu de points images.

B.5. Espace objet, espace image

Le sens de propagation de la lumière définissant « un avant » et « un après » du système optique, un objet réel est situé avant la face d'entrée du système et une image réelle est située après la face de sortie du système (fig. 7).

De même, un objet virtuel est situé après la face d'entrée du système et une image virtuelle avant la face de sortie du système.

Remarque : insistons sur le fait que les notions de rayon incident, rayon émergent, d'image, d'objet, de réalité et de virtualité, d'espace image, d'espace objet, sont relatifs à un système optique donné et n'ont de signification que

par rapport à ce système et par rapport à un sens de propagation de la lumière. Toute nouvelle problématique, par exemple l'ajout d'un second système optique (S') à la suite de (S), formant ainsi un nouveau système $\mathcal{S} = \{S \cup S'\}$, doit conduire à une analyse pour redéfinir ces caractères.

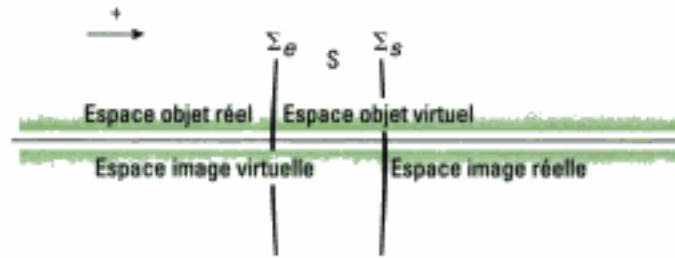


Fig. 7
Espaces objet et images réels et virtuels

C. Stigmatisme rigoureux

C.1. Stigmatisme¹ rigoureux : points conjugués

Si nous utilisons ou fabriquons des systèmes optiques, c'est pour obtenir des images ressemblantes aux objets observés ou projetés. Pour étudier le fonctionnement optique de ces systèmes, nous utilisons la notion fondamentale d'image d'un objet lumineux. Ces images se forment habituellement sur une surface (négatif photographique, rétine, écran...). Nous souhaitons de plus que ces images soient nettes, c'est à dire que le système optique donne un point image de tout point objet d'un domaine à trois dimensions.

Nous introduisons donc pour chaque point objet A une correspondance avec un point image, correspondance réalisée par le système optique (S), que l'on peut traduire par l'idéogramme suivant : $A \xrightarrow{(S)} A'$.

A' est par définition l'image de A donnée par (S).

Définition 9

Un système optique (S) est dit rigoureusement stigmatique pour un point objet A (réel ou virtuel) et le point image A' correspondant (réel ou virtuel) si tous les rayons incidents passant par A émergent du système optique en passant par le point image A' .

En appliquant la loi du retour inverse de la lumière nous obtenons :

$A' \xrightarrow{(S)} A$ ce qui montre que A et A' forment un **couple de points conjugués** pour le système optique (S) rigoureusement stigmatique.

C.2. Que voit l'œil ?

Pour ce qui est de la notion d'image optique classiquement précédemment définie, l'œil est lui-même un système optique. En ce sens, il donne une image de chaque point, objet ou image, qui lui envoie de la lumière.

Par contre, la vision de l'image, au sens plus complet défini précédemment, relève de l'œil et du cerveau qui est accoutumé à la propagation rectiligne.

Propriété 3

Le système visuel perçoit la lumière reçue comme venant en ligne droite : l'image est toujours interprétée comme située au point d'intersection des rayons reçus par l'œil.

1. Du grec « stigma » qui signifie « point ».

Ceci est notamment à l'origine de la notion de mirage rencontrée au chapitre 2 et schématisé en figure 8.

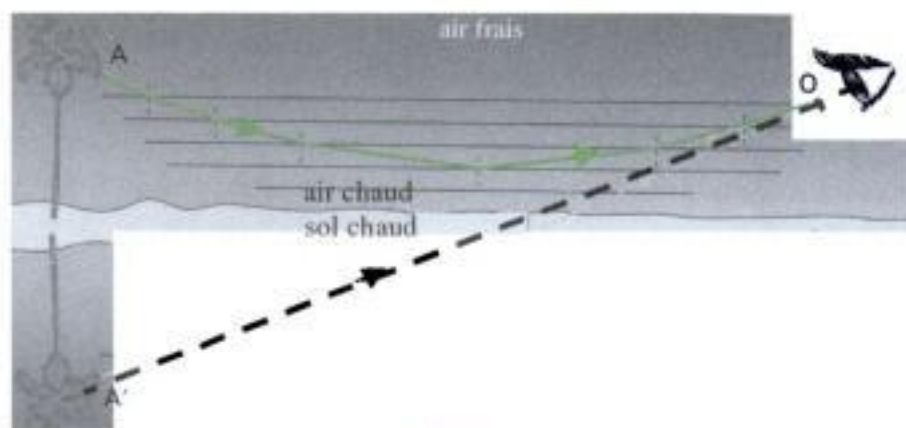


Fig. 8

Mirage inférieur dans un milieu stratifié (cf chap. 2 par. C). Le parcours de la lumière depuis le point objet A se courbe du côté des indices de l'air chauffé le plus fortement. Le système visuel interprète la lumière reçue comme vérifiant le principe de propagation rectiligne ; il « voit » la lumière reçue comme venant de A', image de A, dans la direction OA' et observe le palmier dans le sol, la tête en bas. Après analyse de cette image et son rejet par le cerveau, vu son caractère impossible, elle est qualifiée d'illusion, de mirage.

Remarque : nous noterons en pointillés un trajet qui n'est pas réellement emprunté par la lumière mais qui correspond à une démarche mentale du cerveau qui utilise systématiquement la propagation rectiligne de la lumière pour interpréter les images. Pour l'observateur de la figure 8, dans la direction OA' il y a un palmier.

C.3. Le miroir plan : un système optique rigoureusement stigmatique

1. Voir la définition au chap. 2 paragraphe B.

Le miroir plan¹ va nous permettre de donner corps à la notion de stigmatisme rigoureux et servira de support pour introduire plusieurs notions importantes concernant les systèmes optiques.

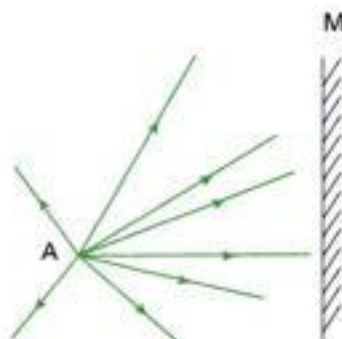


Fig. 9

Situation de départ : un miroir plan est éclairé par un point objet, ici réel.

Considérons un miroir plan M comme système optique et un point objet A comme source lumineuse (fig. 9). Nous cherchons quelle est l'image A' de A donnée par le miroir plan en utilisant un tracé de rayons émergents.

Procédons à la construction du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné.

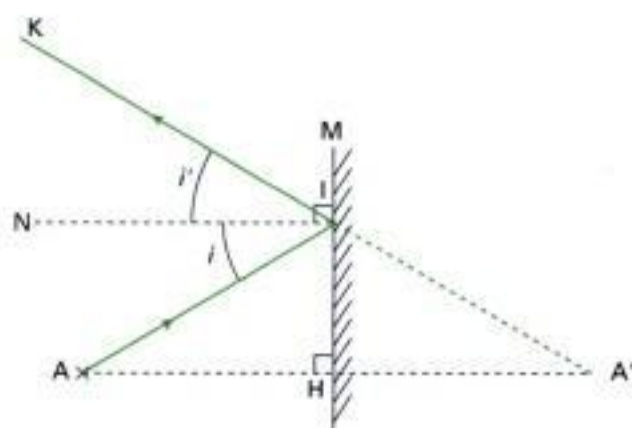


Fig. 10

Construction du rayon émergent correspondant à un incident donné

Soit un rayon incident AI (fig.10). Nous utilisons la loi de Snell-Descartes pour tracer le rayon réfléchi IK lors de la réflexion spéculaire en I : nous avons donc $i = i'$. Traçons aussi la perpendiculaire AH au miroir en A.

IK et AH se coupent en un point A'.

AI étant une sécante aux deux parallèles IN et AA', nous avons

$$\widehat{HAI} = \widehat{NIA} = i.$$

De même, A'K sécante à IN et AA', nous donne : $\widehat{HA'I} = \widehat{NIK} = i'$.

On a donc $\widehat{HAI} = \widehat{HA'I}$

Ainsi, les triangles AIH et A'IH sont égaux puisqu'ils ont un côté égal HI compris entre deux angles égaux $\widehat{AHI} = \widehat{A'HI}$ et $\widehat{HIA} = \widehat{HIA'}$.

En conséquence, $AH = HA'$ et A' est le symétrique de A par rapport au miroir M.

La démonstration précédente ne dépend pas du point d'incidence choisi sur le miroir (fig. 11) ce qui permet d'énoncer la propriété suivante :

Propriété 4

Un miroir plan donne d'un point objet A une image A' symétrique de A par rapport au plan du miroir.

En conséquence, pour obtenir le rayon émergent correspondant à un rayon incident issu de A, en un point quelconque I sur le miroir, il suffit de tracer le symétrique A' de A puis le rayon IK ayant la droite A'I pour support.

Propriété 5

Dans le cas du système optique miroir plan, tout rayon incident passant par le point objet A se réfléchit en passant par le point image A' symétrique de A par rapport au plan du miroir.

Ainsi, tout point objet possède une image rigoureusement stigmatique. Le miroir plan est le seul système rigoureusement stigmatique pour tout point de l'espace objet.

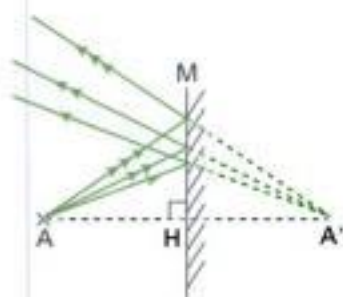


Fig. 11
Tracé de l'image de A dans le miroir.

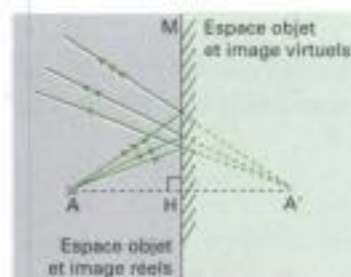


Fig. 12
Réel ou virtuel ?

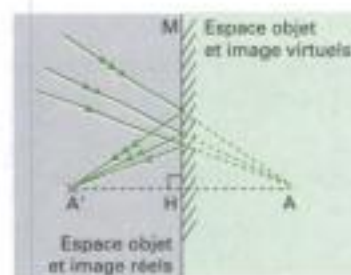


Fig. 13
Réel ou virtuel ?

C.4. Réalité et virtualité dans le cas du miroir plan

Appliquons les définitions vues précédemment à la situation de la figure 12. Le point A, origine d'un faisceau incident conique divergent est un point objet réel pour le miroir plan qui joue le rôle de système optique.

L'espace situé à gauche du miroir est l'espace objet réel. L'objet se situant dans cet espace, il est bien réel.

A', origine d'un faisceau émergent¹ conique divergent est un point image virtuelle pour le miroir plan. L'espace image réelle se confond ici avec l'espace objet réel puisque la lumière est contrainte de revenir dans le milieu d'arrivée : ceci est une propriété des systèmes catoptriques ou catadioptriques qui contiennent des miroirs.

L'image A' se situe dans l'espace image virtuelle : elle est donc bien virtuelle. Peut-on obtenir une image réelle avec un miroir plan ?

La réponse est immédiate : appliquons le principe du retour inverse de la lumière à l'exemple précédent : nous obtenons la figure 13.

Le faisceau incident est bien un cône convergent : l'objet est virtuel et l'image est réelle. Il est donc possible d'obtenir une image réelle avec un miroir plan.

1. Le faisceau émergent du miroir plan est aussi dit faisceau réfléchi.

1. Dans la formation des images il importe peu que l'objet lumineux soit une source primaire ou secondaire (cf. chapitre 1). Il suffit que de l'objet partent des rayons lumineux qui forment une image par l'intermédiaire du système optique.

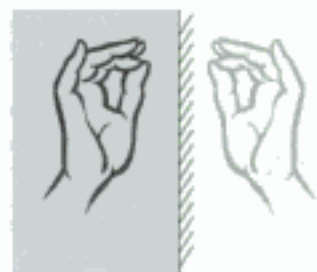


Fig. 14

L'objet et son image dans un miroir ne sont généralement pas superposables

C.5. Construction d'une image¹

Propriété 6

Dans le cas où il y a stigmatisme rigoureux pour deux points A et A' , si l'on souhaite déterminer A' connaissant A (ou le contraire), deux rayons provenant de A suffisent pour déterminer le point image A' qui se trouve à l'intersection des rayons émergents correspondants du système optique.

C.6. Image d'un objet étendu dans un miroir plan

Chaque point objet donne un point image par symétrie par rapport au miroir. L'opération géométrique qui donne l'image d'un objet étendu dans un miroir plan est donc une symétrie par rapport au plan du miroir.

Comme sur la figure 14, l'objet n'est généralement pas superposable à son image : l'objet est dit chiral.

C.7. Relation de conjugaison

Propriété 7

Dans le cas où il y a stigmatisme rigoureux, l'image d'un point objet est unique. Il existe donc une relation de conjugaison algébrique qui lie la position d'un point objet et de son image.

Dans le cas du miroir plan cette relation de conjugaison s'écrit :

$$\overline{HA} = -\overline{HA'} \quad \text{où } H \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur le miroir plan.}$$

C.8. Grandissement transversal

Soit un objet de direction AB perpendiculaire à la normale au miroir passant par le point objet A : cet objet est dit transverse et son image est aussi transverse (fig. 15).

Définition 10

Le grandissement transversal γ , pour le point B , est le rapport algébrique entre la valeur algébrique du segment image transversal et celle du segment objet transversal conjugués : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

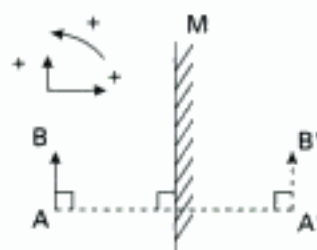


Fig. 15

Image d'un objet transverse

D'une manière générale, lorsque $\gamma > 0$ alors \overline{AB} et $\overline{A'B'}$ sont de même sens, l'image est dite droite. Si $\gamma < 0$ alors \overline{AB} et $\overline{A'B'}$ sont de sens opposés, l'image est dite renversée.

L'algèbrisation usuelle de l'espace repose sur le sens de propagation de la lumière et sur le sens trigonométrique (fig. 15).

Dans le cas du miroir plan, $A'B'$ étant le symétrique de AB par rapport au miroir, alors $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ et $\gamma = 1$. L'image transversale donnée par un miroir plan est toujours droite.

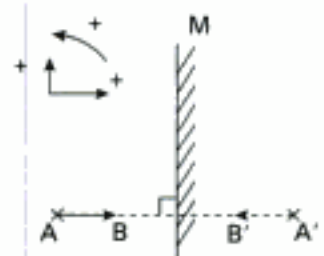


Fig. 16

Image d'un objet sur l'axe

C.9. Grandissement axial γ_a

Soit un objet AB porté par une normale au miroir et A'B' son image donnée par le miroir plan, elle même axiale (fig. 16).

Le grandissement axial γ_a , pour le point B, est le rapport algébrique entre la valeur algébrique du segment image axial et celle du segment objet axial :

$$\gamma_a = \frac{A'B'}{AB}$$

Dans le cas du miroir plan, $\gamma_a = -1$, l'image axiale est toujours renversée, en raison de la propriété de symétrie.

D. Les systèmes centrés

Définition 11

Un système optique centré est un système qui possède un axe de symétrie de révolution appelé axe optique¹.

Les dioptrés et les miroirs qui composent le système sont des surfaces de révolution engendrées par la rotation d'une courbe plane située dans un plan contenant l'axe.

Le dioptré plan et le miroir plan seront considérés comme des systèmes centrés puisque cette considération n'affecte pas la construction des rayons lumineux les concernant. Seule la notion de champ dépendra de la forme du miroir plan (cf. chap. 4) ou du dioptré plan.

Dans la suite de ce chapitre nous ne considérerons que des systèmes optiquement centrés. Le prisme est un des rares cas de système optique non centré.

Exemple : le miroir parabolique de la figure 17 est un système centré. En effet, ce système est engendré par la rotation autour de l'axe noté Δ d'une courbe plane qui est un morceau de parabole (représentée dans le plan de la feuille sur cette figure).

E. Aplanétisme rigoureux

Définition 12

Dans le cas d'un système centré pour lequel il existe un couple de points A et A' de son axe optique rigoureusement stigmatiques, si B est un point voisin de A dans un plan transverse, le système est dit rigoureusement aplanétique pour les points A et A' si l'image B' au voisinage de A' est quasiment exempte de défauts, notamment des aberrations sphériques et de coma².

2. Ces défauts seront définis au paragraphe I. de ce chapitre.

F. Stigmatisme approché

Comme indiqué précédemment, à part le cas du miroir plan, dont l'intérêt pour ce qui est du grandissement est très limité, il n'existe pas de système optique rigoureusement stigmatique. Au mieux le sont-ils pour quelques points de leurs espaces objet et image.

1. L'axe de révolution est aussi appelé axe principal

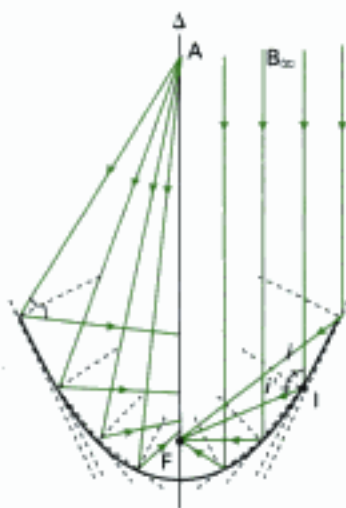


Fig. 17

Image d'un point à l'infini et d'un point à distance finie données par un miroir parabolique

1. Le stigmatisme rigoureux du couple de points $[F; B_\infty]$ est utilisé dans les phares de voiture. L'ampoule est placée au point F ; les rayons émis sortent alors du phare sous forme d'un faisceau cylindrique de rayons.

2. En astrophotographie, même si la meilleure définition d'image est obtenue avec une pellicule photographique, les caméras CCD présentent un plus grand intérêt puisqu'elles utilisent jusqu'à 50 % de la lumière reçue contre 4 % pour la pellicule.

Ainsi, dans le cas des miroirs utilisés en astronomie, dont un exemple est représenté en figure 17, la forme de la surface qui reçoit la lumière est un parabolôïde dont la trace dans le plan de figure, où nous traçons le parcours de quelques rayons lumineux, est une parabole. Pour un rayon incident, par exemple en I , en ce point nous traçons la tangente à la parabole, puis la normale à la surface et enfin nous appliquons la loi de Snell-Descartes de la réflexion : $i = i'$.

Dans la partie droite de la figure, nous formons l'image d'un point B à l'infini qui envoie donc des rayons parallèles sur le miroir. Nous constatons que tous les rayons issus de B convergent en un même point F . Il y a donc stigmatisme rigoureux¹ pour les points B et F .

Dans la partie gauche de la figure, nous cherchons l'image d'un point A de l'axe situé à distance finie du miroir. L'image de A devrait se trouver sur l'axe puisque le rayon qui suit l'axe revient sur lui-même étant donné que l'angle d'incidence sur la surface du miroir est alors nul. En traçant comme précédemment plusieurs rayons réfléchis, nous obtenons autant d'images que de rayons incidents, puis réfléchis, considérés deux à deux. Le miroir parabolique n'est donc pas rigoureusement stigmatique pour un point objet situé à distance finie.

Fort heureusement, il est inutile que les systèmes optiques respectent le stigmatisme rigoureux et ce pour deux raisons qui leur sont extérieures :

- d'une part le récepteur de l'image (l'œil, le négatif photographique, le capteur CCD de caméra ou d'appareil photographique numérique...) a une résolution limitée. Ainsi, pour l'œil, les cônes récepteurs sur la partie de la rétine la plus sensible ont un écartement de l'ordre de $3 \mu\text{m}$; pour le négatif photographique, le grain le plus petit susceptible de réagir à la lumière, a une dimension de l'ordre de $4 \mu\text{m}$, et cette dimension est de $7 \mu\text{m}$ pour les photorécepteurs de capteurs CCD².

Il est donc seulement nécessaire de créer des systèmes optiques qui forment des points images de dimension un peu inférieure à la taille du photorécepteur utilisé (cône, grain...).

- d'autre part, la lumière étant de nature ondulatoire, la diffraction par les ouvertures du système formera d'un point objet une tache de diffraction image sur le récepteur (Cf chap. 1 ex. 1).

En conclusion, **le stigmatisme rigoureux ne s'impose pas pour un instrument d'optique**, ce qui conduit à définir la notion de stigmatisme approché.

Definition 13

Un système optique est dit stigmatique approché pour un couple de points A et A' si les rayons issus du point objet A convergent, après traversée du système optique, dans un volume de petites dimensions autour du point A' .

Dans le cas habituel où le récepteur est une surface, un négatif photographique par exemple, pour qu'il y ait stigmatisme approché, il faut que les rayons convergent sur une surface finie du récepteur adaptée à la dimension des photorécepteurs contenus dans le récepteur. La notion de stigmatisme approché d'un système optique est donc liée à la nature du récepteur.

Inutile donc d'utiliser un négatif à grains très fins avec un objectif photographique de mauvaise qualité, c'est à dire un objectif non stigmatique approché.

G – Les conditions de Gauss

G.1. Mise en évidence des conditions de Gauss

1. L'étude des lentilles sphériques sera faite dans le chapitre 5.

Considérons le système optique lentille bi-convexe L de la figure 18, placé dans l'air et éclairé par un point source A appartenant à l'axe optique. Cette lentille¹ en verre d'indice n est limitée par deux portions de sphères S_1 et S_2 dont nous voyons la trace sous forme d'un ménisque dans le plan de figure. Chaque sphère a un rayon que l'on appelle rayon de courbure de la surface. Nous traçons le parcours de chaque rayon en appliquant les lois de l'optique géométrique : les milieux sont supposés homogènes, la lumière s'y propage en ligne droite ; à chaque changement de milieu, nous utilisons les lois de Snell-Descartes pour la réfraction. Tous les rayons incidents et transmis n'ont pas été tracés par souci de clarté.

L'image A' de A doit se trouver sur l'axe optique de la lentille matérialisé en traits mixtes sur la figure 18. En effet, un rayon lumineux qui suit l'axe n'est pas dévié puisque l'angle d'incidence sur les dioptries est alors nul.

Nous observons que les rayons éloignés de l'axe, appelés rayons marginaux, qui font avec l'axe des angles importants, convergent les premiers près de la lentille, en des points différents selon les rayons considérés.

Ce système optique ne vérifie pas les conditions de stigmatisme rigoureux car l'image d'un point n'est pas un point mais une tache circulaire dont l'aspect, sur un écran perpendiculaire au plan de figure, dépend de la position le long de l'axe optique.

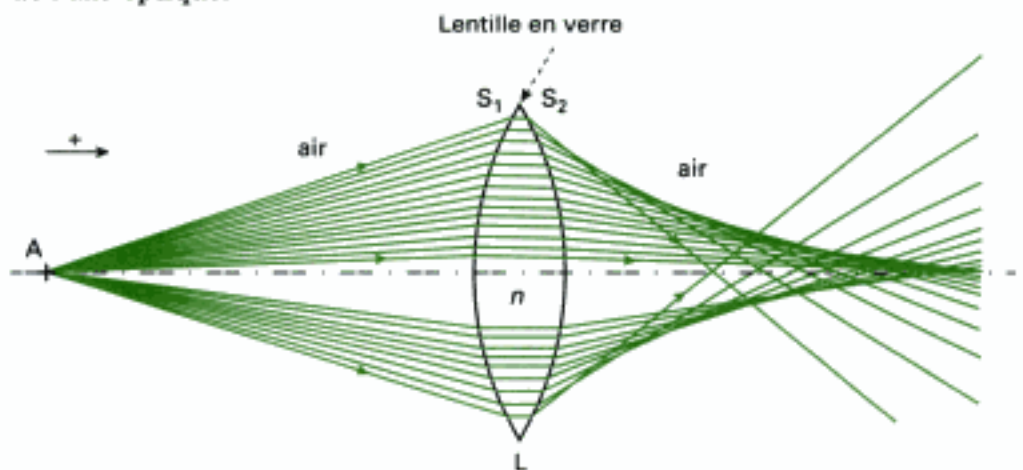


Fig. 18

Recherche de l'image d'un point objet donné par une lentille bi-convexe

Observons ci dessous en figure 19 un agrandissement de la figure 18.

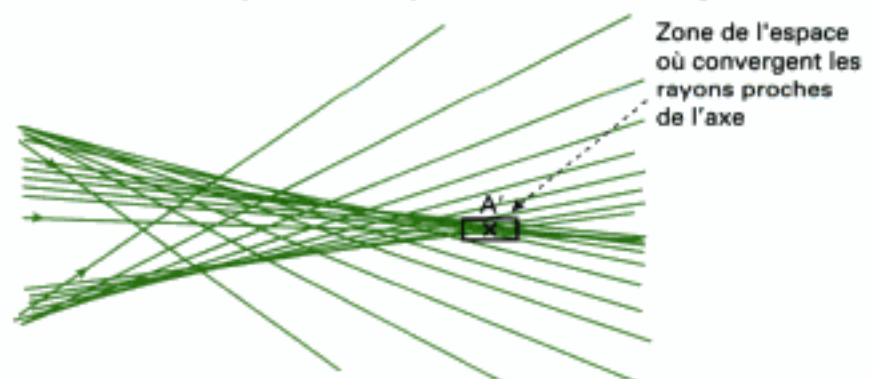


Fig. 19

Seuls les rayons paraxiaux convergent autour d'un point A'

1. On pourra se reporter à l'exercice 9 de ce chapitre ou à la figure 11 du chapitre 5.

2. Conformément à ce que nous avons dit, il faudrait ici posséder des informations concernant le capteur recevant l'image. Le photorécepteur placé sur l'axe doit avoir des dimensions en accord avec le volume définissant le stigmatisme approché.

Nous voyons que les rayons peu éloignés de l'axe et peu inclinés sur l'axe, appelés rayons paraxiaux ou rayons centraux, convergent dans un volume fini proche d'un point A' pour y former sur un écran une tache circulaire avec une concentration de lumière au centre de ce cercle¹.

Propriété 8

La lentille est un système stigmatique approché pour un couple de points A et A' si les rayons issus de A sont proches de l'axe et si ces rayons font avec cet axe des angles petits.

Ces conditions concernant les rayons sont les *conditions de Gauss*.

Le point A' est dans ce cas l'image de A donnée par la lentille², au sens du stigmatisme approché.

Nous remarquons que les paramètres concernant les rayons sont :

- l'éloignement à l'axe optique, ou hauteur d'incidence h ;
- l'inclinaison α sur l'axe, ce que nous pouvons résumer par la figure 20 suivante :

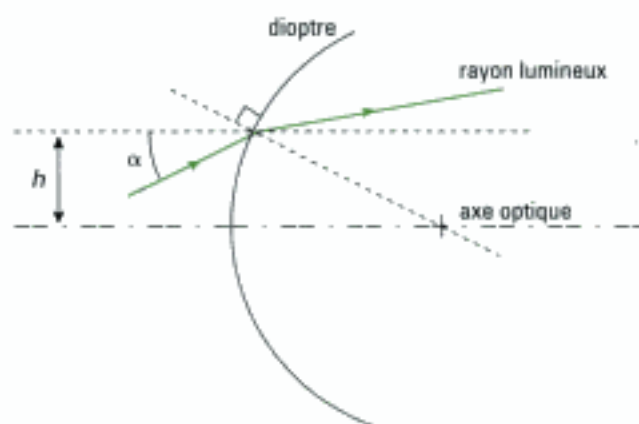


Fig. 20

Paramètres h et α concernant un rayon lumineux

Pour les systèmes centrés nous généralisons le résultat précédent :

Définition 14

Pour un système centré il suffit de réaliser les conditions de Gauss pour que le système soit stigmatique approché. Pour ceci :

- les angles α des rayons avec l'axe doivent être faibles ;
- la hauteur d'incidence h de tous les rayons sur chaque dioptre ou miroir doit être faible devant le rayon de courbure de ces dioptres ou miroirs.

Nous pouvons résumer ces deux conditions en une seule en disant que **les rayons doivent être paraxiaux**, si l'on donne à ce dernier mot la double définition précédente.

G.2. Conséquences des conditions de Gauss

G.2.1 - Approximations trigonométriques

Les angles étant supposés petits, nous pourrions accepter les développements limités des fonctions trigonométriques et utiliser des relations approchées :

$$\sin(x) \approx x ; \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} ; \tan(x) \approx x \text{ et au premier ordre } \cos(x) \approx 1.$$

G.2.2 – Aplanétisme approché

Propriété 9

Dans les conditions de Gauss, un point *voisin* de l'axe dans un plan transverse vérifie aussi les conditions de stigmatisme approché ce qui fait que l'aplanétisme est toujours vérifié. L'image d'un plan transverse, ou plan de front, est un plan de front. Les plans de front objet et image sont conjugués.

G.2.3 – Relation de conjugaison

Propriété 10

La conjugaison des points objet A et image A' appartenant à l'axe, ainsi que celle des plans de front associés, en raison du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés, se traduit par une relation algébrique appelée relation de conjugaison.

G.2.4 – Construction des images

Dans les conditions de Gauss, pour construire l'image d'un objet AB situé dans un plan de front, A étant un point de l'axe optique, remarquons que la direction AB et l'axe optique définissent un plan méridien¹ du système centré. Le système étant de révolution, ce plan contient la normale au point d'incidence. Conformément aux lois de Snell-Descartes, deux rayons issus de B et appartenant à ce plan méridien, se propagent dans ce plan et leur intersection donne le point image B' . L'image $A'B'$ est donc dans ce plan méridien.

Propriété 11

Pour obtenir l'image $A'B'$ d'un objet AB situé dans un plan de front, A étant un point de l'axe optique, il suffit de tracer dans le plan méridien contenant AB , deux rayons issus de B , et d'obtenir leur intersection B' à la sortie du système. Le point A' s'obtient ensuite sur l'axe en utilisant la correspondance de plan de front à plan de front, c'est à dire en abaissant la perpendiculaire depuis B' sur l'axe optique.

G.2.5 – Grandissement transversal et grandissement angulaire

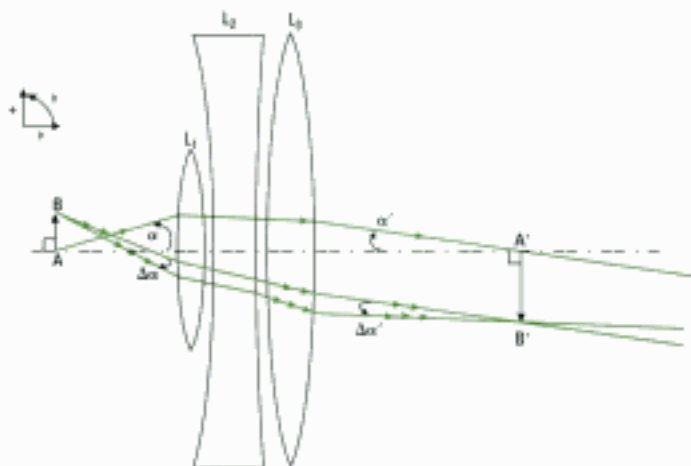


Fig. 21

Image d'un objet donnée par un système optique composé de trois lentilles épaisses²

1. Un plan méridien est un plan passant par l'axe d'une surface de révolution.

2. L'usage veut que l'angle algébrique que fait un rayon lumineux avec l'axe soit fléché depuis l'axe vers le rayon.

1. Lorsque l'objet ou l'image sont à l'infini, la notion de grandissement transversal n'est plus définie.

2. En optique paraxiale, l'image d'un plan oblique sur l'axe est un plan oblique sur l'axe mais il n'y a plus de relation d'homothétie entre l'image et l'objet. Ce cas est assez fréquent dans la formation de l'image en deux dimensions (négatif photographique, écran...) d'un objet en trois dimensions.

3. Le cas du point objet ou image à l'infini est fondamental et fréquent dans l'utilisation de systèmes optiques.

• Grandissement transversal

La définition du grandissement transversal¹ reste la même que précédemment :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB}$$

qui ne dépend que du plan de front objet ou image (fig. 21).

Propriété 12

En optique paraxiale, l'image et l'objet transverses sont homothétiques².

Définition 15

Les angles étant orientés, le grandissement angulaire g est le rapport entre l'angle que fait un rayon émergent avec l'axe optique et l'angle que fait avec cet axe le rayon incident : $g = \frac{\alpha'}{\alpha}$ (fig. 21).

Le grandissement angulaire est aussi le rapport entre l'angle d'ouverture $\Delta\alpha'$ d'un pinceau émergent passant par B' et l'angle d'ouverture du pinceau inci-

dent correspondant passant par B alors,

$$g = \frac{\Delta\alpha'}{\Delta\alpha}$$

G.2.6 – Foyers

G.2.6.1 – Foyer objet d'un système optique (S)

Définition 16

Le foyer objet F d'un système optique a pour conjugué le point image A' réel à l'infini³.

G.2.6.2 – Foyer image d'un système optique (S)

Définition 17

Le foyer image F' d'un système optique est le conjugué du point objet A réel à l'infini.

Le point objet A étant à l'infini, il envoie sur le système (S) un faisceau cylindrique qui est transformé par le système en un faisceau conique. Le sommet de ce cône est le foyer image F' qui peut être réel ou virtuel.

H. Application au dioptré plan

Nous avons déjà rencontré le dioptré plan utilisé dans les conditions de Gauss (cf. ex. 7 chap.2). Plaçons nous maintenant en dehors des conditions de Gauss et calculons la position précise de l'image.

H.1. Position de l'image d'un point donnée par le dioptré plan en dehors des conditions de Gauss

Un point objet A_1 situé dans le milieu ① d'indice n_1 envoie de la lumière sur un dioptré plan séparant le milieu ① d'un milieu ② d'indice n_2 , avec par hypothèse $n_1 < n_2$.

Quelle est la position du point A_2 image de A_1 ?

Nous savons que le rayon incident perpendiculaire au dioptre ne sera pas dévié car son angle d'incidence est nul. L'image A_2 de A_1 est donc sur la normale A_1H au dioptre.

Sur le dessin (fig. 22), issu de A_1 nous traçons le rayon A_1I faisant l'angle i_1 par rapport à la normale au dioptre.

En utilisant la loi de la réfraction, nous traçons le rayon qui est transmis dans le milieu ② avec l'angle i_2 .

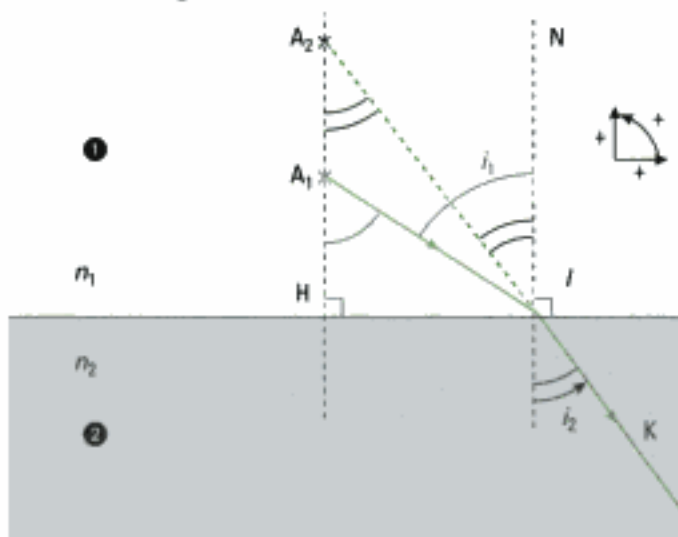


Fig. 22

Dioptre plan : tracé de rayons

L'image de A_1 est située en A_2 à l'intersection des directions A_1H et IK qui sont les supports des rayons émergents. A_2 est donc un point image virtuel puisqu'il est situé dans l'espace objet.

Les sécantes A_1I et A_2I aux parallèles A_2H et NI nous permettent d'écrire que $\overline{HA_1I} = i_1$ et $\overline{HA_2I} = i_2$.

En écrivant l'expression algébrique de la tangente des angles i_1 et i_2 dans les triangles A_2HI et A_1HI nous obtenons :

$$\overline{HI} = \overline{HA_1} \tan (i_1) = \overline{HA_2} \tan (i_2) \text{ et donc } \overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\tan (i_1)}{\tan (i_2)}.$$

Exprimons $\overline{HA_2}$ en fonction de i_1 qui est la donnée du problème.

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\sin (i_1) \cos (i_2)}{\cos (i_1) \sin (i_2)} = \overline{HA_1} \frac{n_2 \cos (i_2)}{n_1 \cos (i_1)} \text{ puisque } n_1 \sin (i_1) = n_2 \sin (i_2).$$

Or, $\cos (i_2) = \sqrt{1 - \sin^2 (i_2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 (i_1)}$ ce qui donne la relation de

$$\text{conjugaison : } \overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 (i_1)}}{\cos (i_1)}$$

La position de A_2 dépend donc de l'angle d'incidence i_1 . Chaque rayon provenant de A_1 et interceptant le dioptre plan donne une image A_2 de A_1 située sur HA_1 différente de celles données par des rayons arrivant sous d'autres incidences. Il n'y a donc pas dans ce cas stigmatisme rigoureux. L'image d'un point quelconque n'est pas un point.

H.2. Points particuliers assurant le stigmatisme rigoureux du dioptre plan

Il y a stigmatisme rigoureux si $\overline{HA_2}$ ne dépend pas de l'angle d'incidence i_1 , ce qui est le cas si :

$\overline{HA_1} = 0 \Rightarrow \overline{HA_2} = 0$: le point objet et son image sont sur le dioptre plan ;

$\overline{HA_1} \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \overline{HA_2} \rightarrow \pm \infty$: le point objet et son image sont à l'infini.

Seul le second cas a un intérêt certain : le système est alors dit afocal et tout faisceau cylindrique incident émerge comme un faisceau cylindrique. Nous comprenons ici l'intérêt qu'il y a en travaux pratiques à travailler en lumière parallèle avec un prisme.

H.3. Stigmatisme approché du dioptre plan

Si l'angle i_1 est petit, nous pouvons dire que $\sin(i_1) \rightarrow 0$ et $\cos(i_1) \rightarrow 1$, la

relation $\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(i_1)}}{\cos(i_1)}$ devient $\overline{HA_2} \rightarrow \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1}$.

Plus rigoureusement, si i_1 est petit, nous pouvons utiliser les développements limités de $\sin(i_1)$ et $\cos(i_1)$. Nous obtenons alors $\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1} + o(i_1^2)$ où $o(i_1^2)$ est une expression du second ordre en i_1 .

Propriété 13

Le point H étant le projeté du point A_1 sur le dioptre plan, si les rayons font un *petit angle* avec la droite (HA_1) , qui est aussi l'axe optique du dioptre plan, le dioptre plan fournit une image A_2 stigmatique approchée du point A_1 . La relation de conjugaison s'écrit alors : $\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1}$.

Si l'objet est réel (comme en figure 22), l'image est virtuelle. Si l'objet est virtuel, l'image est réelle.

En conclusion, si les conditions de Gauss sont vérifiées pour le dioptre plan, alors le dioptre plan est stigmatique et il existe une relation de conjugaison simple de point objet à point image qui ne dépend pas de l'angle d'incidence des rayons issus du point objet.

I. Aberrations des systèmes optiques

I.1. Introduction

Dans ce paragraphe nous nous donnons pour but de donner quelques notions concernant les aberrations des systèmes optiques et leurs corrections, en s'appuyant sur des systèmes optiques simples.

Dans le cas des systèmes centrés nous avons vu l'importance des conditions de Gauss dans la formation d'une image. Dans le cadre de cette optique paraxiale, le système est approximativement stigmatique et nous considérons que les images obtenues sont nettes.

L'optique paraxiale est cependant une approximation comme le montre pour le dioptre plan la relation $\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1}$ du paragraphe H.3, dans laquelle

nous avons négligé les termes du deuxième ordre en i_1 dans la suite du calcul. Dans le cas général, les images obtenues ne sont pas parfaites car :

- il n'y a pas stigmatisme rigoureux ;
- la diffraction donne d'un point objet une tache de diffraction ;
- les dioptries traversés par la lumière polychromatique la dispersent ;
- dans les système réels, des rayons peuvent être très inclinés sur l'axe ou éloignés de l'axe.

Définition 18

On désigne sous le nom d'aberrations les défauts des images dus à la dispersion ou aux écarts à l'optique de Gauss.

On distingue deux catégories d'aberrations :

- les aberrations dues à la dispersion, ou **aberrations chromatiques** ;
- les aberrations en lumière monochromatique dues aux termes négligés dans le cas de l'optique paraxiale (cf relation de conjugaison du dioptre plan), que l'on appelle **aberrations géométriques**.

Dans les aberrations géométriques on distingue l'aberration sphérique, l'aberration de coma, l'astigmatisme, la courbure de champ et la distorsion.

I.2. Aberration chromatique

Nous supposons dans ce paragraphe que les autres aberrations sont négligeables devant l'aberration chromatique.

Cette aberration concerne les systèmes optiques transparents traversés par une lumière polychromatique comme la lumière blanche par exemple. Puisque l'angle de déviation aux changements de milieu x dépend de l'indice, donc de la longueur d'onde, il y a dispersion de la lumière.

Ainsi, nous savons que la déviation d'un rayon lumineux due à un prisme est plus importante pour les radiations bleues que pour les radiations rouges (voir annexe du chapitre 2). Nous retrouvons cette propriété dans les lentilles comme le montre la simulation de la figure 23.

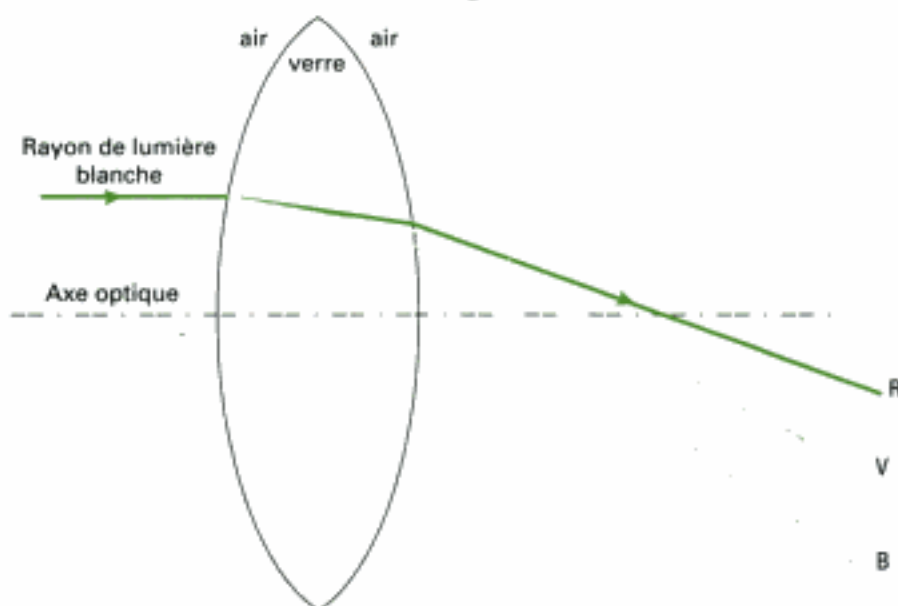


Fig. 23

Trajets de rayons lumineux à la traversée d'une lentille pour une lumière incidente polychromatique

On a représenté sur cette figure le trajet suivi par trois radiations de couleur

rouge (R), verte (V), bleue (B) qui sont contenues dans la lumière blanche incidente.

Un objet éclairé en lumière blanche, placé devant une lentille, donnera donc une image différente pour chaque longueur d'onde ; chaque image aura une position et une grandeur différente.

Il y a donc chromatisme de position, ou chromatisme axial, et chromatisme de grandissement.

1. Nous cherchons ici à réduire l'aberration chromatique. Dans d'autres systèmes optiques, on souhaite au contraire l'augmenter, comme dans les spectromètres où l'on analyse la répartition en fréquence de la lumière émise par la source.

Pour corriger¹ cette aberration et fabriquer des lentilles achromatiques convergentes, on accole à des lentilles convergentes taillées dans des verres crowns peu dispersifs, des lentilles divergentes en verre flint très dispersifs (Cf chap.1 et chap. 5)

I.3. Aberrations géométriques

I.3.1 – Aberration de sphéricité

Au paragraphe G.1. nous avons mis en évidence l'aberration de sphéricité d'une lentille en montrant que les rayons réfractés par les bords de la lentille, les rayons marginaux, coupent l'axe optique en des points plus rapprochés de la lentille que les rayons paraxiaux ne le font (fig. 18 et 19).

Il y a perte de stigmatisme, même approché.

Cette aberration qui n'est pas propre aux seules lentilles, est liée à la hauteur d'incidence des rayons et donc à la dimension du diaphragme ou du système optique. C'est donc une aberration due à l'ouverture du système.

Il y a accumulation de lumière sur une surface de révolution appelée caustique, en forme de pointe de flèche. La trace de cette caustique est marquée en pointillés dans le plan de la figure 24.

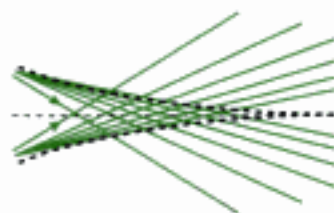


Fig. 24

Trace de la caustique

Pour corriger cette aberration, nous pouvons fermer le diaphragme, tant que la diminution d'intensité lumineuse n'est pas préjudiciable à l'image, ou fabriquer des lentilles dont la forme de la surface compense ces aberrations, mais la solution est coûteuse. Dans la pratique, on préfère associer une lentille divergente à la lentille convergente, qui a le même comportement pour ce qui est des rayons marginaux et paraxiaux, en combinant les rayons de courbure et les indices des verres pour que les aberrations des deux lentilles se compensent.

I.3.2 – Aberration de coma

L'aberration de coma est observée dans le cas de faisceaux inclinés sur l'axe optique de systèmes optiques tels que les lentilles ou les miroirs sphériques de grande ouverture. On observe encore une caustique. Dans ce cas, le point image a la forme d'une queue de comète (fig. 25), d'où le nom de coma donné à cette aberration. En effet, les rayons marginaux convergent de manière dissymétrique ce qui donne une tache allongée (fig.25).

L'aberration de coma se traduit par une perte de netteté et de contraste.

On peut là encore limiter cette aberration en fermant le diaphragme.

I.3.3 – L'astigmatisme

L'astigmatisme est un défaut de l'image qui concerne un point éloigné de l'axe optique, même pour des systèmes très diaphragmés. On observe alors un point image allongé verticalement ou horizontalement si l'on déplace un écran pour recueillir l'image. Si l'on prend un objet plan tel une croix, on ne



Fig. 25

Image de coma donnée sur un écran perpendiculaire à la direction du faisceau incident.

peut jamais obtenir au même endroit une image nette du trait vertical et du trait horizontal.

On sait construire des objectifs anastigmats qui corrigent partiellement ce défaut, par association de lentilles. Le champ de netteté ne dépasse pas les 50° .

Ce défaut affecte assez souvent l'œil. Dans ce cas il est dû à la forme non sphérique de la cornée et il affecte la vision des points sur l'axe. Il est corrigé par des verres anastigmats.

I.3.4 – La courbure de champ

Ce défaut est lié au précédent mais il peut exister même si l'astigmatisme est corrigé.

Dans le cas d'une lentille, l'image d'un objet plan transverse se forme sur une surface courbe dont la concavité est tournée vers la lentille.

Cette aberration donne des bords d'image flous.

La courbure des lentilles est à l'origine de ce défaut que l'on peut corriger en associant plusieurs lentilles d'indices différents, ou en diaphragmant.

I.3.5 – La distorsion

Cette aberration concerne de grands objets transverses et elle n'affecte pas l'image d'un point au sens du stigmatisme approché. Le défaut porte sur la position de cette image, que l'on trouve à un autre emplacement que ce que prévoit l'optique paraxiale. La distorsion varie avec la position du point objet et l'emplacement du diaphragme.

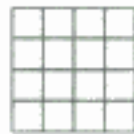


Fig. 26a

Objet et image paraxiale



Fig. 26b

Image en forme de barillet



Fig. 26c

Image en forme de coussinet

Fig. 26

Images de distorsion

Dans une expérimentation, à l'aide d'une lentille mince convergente, nous formons l'image d'un quadrillage sur un écran situé dans le plan conjugué de l'objet (fig. 26.a). Plaçons un diaphragme au plus près de la lentille. Nous observons sur l'écran une figure semblable à la figure 26.a car les conditions sont celles de Gauss, l'image est ressemblante à l'objet.

Si nous éloignons le diaphragme de la lentille, en le gardant entre l'objet et la lentille, nous obtenons une image en forme de barillet et nous constatons que le grandissement transversal est plus faible au bord du champ qu'au centre (fig. 26.b).

Si le diaphragme est éloigné, tout en restant entre la lentille et l'image, nous obtenons une image en forme de coussinet et nous constatons que le grandissement transversal est plus important au bord du champ qu'au centre (fig. 26.c). Ces deux dernières observations sont dues au parcours des rayons marginaux. Ce défaut est difficile à corriger totalement. La plupart des systèmes optiques travaillent hors de conditions de Gauss car elles sont trop restrictives (intensité lumineuse, ouverture, inclinaison).

En conséquence, la complexité des systèmes optiques résulte de la correction des aberrations mais il est rare que toutes les aberrations géométriques puissent être corrigées en même temps.

L'essentiel

✓ Définitions générales

- Objet et point objet réel ou virtuel, image et point image réelle ou virtuelle, système optique centré, foyers objet et image.
- Stigmatisme rigoureux ou approché, aplanétisme rigoureux ou approché.
- Les conditions de Gauss et leurs conséquences.
- Vision de l'œil.
- Grandissement transversal et axial, grandissement angulaire qui sont des grandeurs algébriques ; elles sont donc associées à une algébrisation de l'espace.

✓ Le miroir plan

- Rigoureusement stigmatique, l'image A' est symétrique de l'objet A par rapport au plan du miroir avec :

$$\overline{HA} = -\overline{HA'}, \text{ où } H \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur le miroir.}$$

- Le grandissement transversal est égal à $+1$, le grandissement axial est égal à -1 .

✓ Le dioptre plan

- Deux cas de stigmatisme rigoureux : objet à l'infini ou sur la surface du dioptre.
- Dans le cas du stigmatisme approché, les positions de l'objet A_1 , de l'image A_2 et du projeté orthogonal H de A_1 sur la surface du dioptre sont liées par la relation de conjugaison :

$$\frac{\overline{HA_2}}{n_2} = \frac{\overline{HA_1}}{n_1}$$

n_1 désignant l'indice du milieu où se situe l'objet et n_2 l'indice du milieu où est réfractée la lumière issue de l'objet.

✓ Aberrations des systèmes optiques

On distingue deux types d'aberrations :

- l'aberration chromatique causée par le caractère dispersif des milieux optiques traversés ;
- les aberrations géométriques dues à l'ouverture du système (aberration de sphéricité), l'inclinaison des rayons et l'ouverture du système (coma), à l'éloignement d'un point hors de l'axe optique (astigmatisme), la courbure des dioptries (courbure de champ), au parcours des rayons marginaux (distorsion).

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment trouver l'image donnée par un dioptre plan ?

On se propose de dégager une méthode générale permettant de déterminer l'image d'un objet donnée par le dioptre plan.

→ Savoir-faire

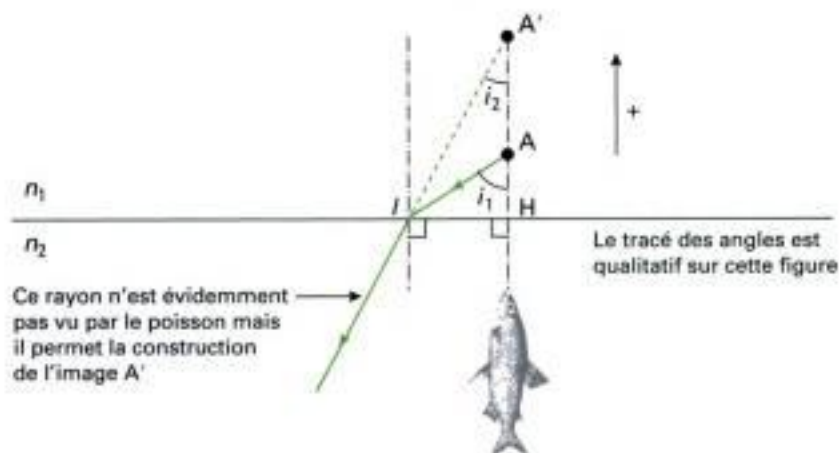
- 1 Vérifier les conditions nécessaires à la formation d'une image : ce sont les conditions de Gauss. Il faut donc considérer des rayons lumineux émis par l'objet et peu inclinés sur la normale au dioptre.
- 2 Construire géométriquement l'image de l'objet sachant qu'en pratique on est obligé de tracer des rayons avec un angle suffisamment grand afin de garantir la lisibilité de la figure.
- 3 Appliquer la relation de conjugaison pour déterminer, par exemple, la position de l'image.

→ Application

Un insecte vole à 20 cm au-dessus de la surface de l'eau et passe à la verticale d'un poisson situé à 1 m sous la surface de l'eau. À quelle distance le poisson situe-t-il l'insecte lors de son passage à la verticale ?

Solution

- 1 Il faut se placer dans le cadre des conditions de Gauss. Dans cette situation, cela revient à considérer l'insecte à la verticale de l'œil du poisson. Pour simplifier, on assimile l'insecte à un objet ponctuel A.
- 2 On détermine géométriquement la position de l'image A' de A à travers le dioptre plan formé par la surface de l'eau en utilisant la loi de Snell-Descartes de la réfraction.



- 3 La position de A' peut être obtenue en utilisant la relation de conjugaison :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n_2} \text{ avec ici : } n_1 = 1,00 ; n_2 \approx 1,33 \text{ et } \overline{HA} = 20,0 \text{ cm.}$$

d'où : $\overline{HA'} = 1,33 \times 20,0 = 26,6 \text{ cm}$. Le poisson voit donc l'insecte à une distance de 126 cm.

Remarque : dans ce type d'exercice, même si le calcul direct est possible, il est vivement recommandé de déterminer qualitativement dans un premier temps la position de l'image de l'objet.

Méthode n°2

Comment étudier une association de miroirs plans ?

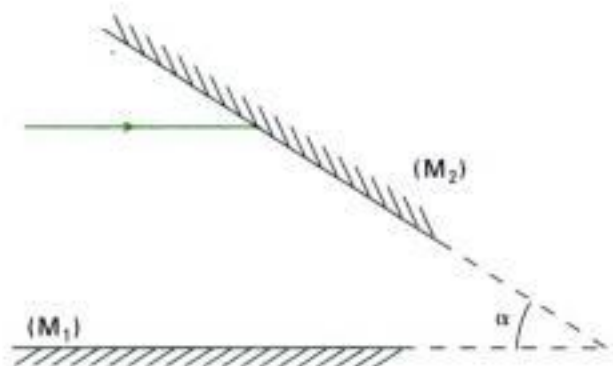
Lorsque plusieurs miroirs plans sont associés il est commode de résoudre le problème en appliquant la méthode suivante.

→ Savoir-faire

- ❶ Identifier la nature du problème posé : soit l'étude porte sur un tracé de rayons lumineux, soit elle porte sur les images successives d'un objet (ponctuel ou étendu) obtenues par l'ensemble des miroirs plans.
 - ❷ Dans le cas où l'on s'intéresse aux rayons lumineux, il faut utiliser la loi de Snell-Descartes de la réflexion et des relations géométriques.
- Dans le cas où il s'agit de déterminer les images successives, on utilise la relation de conjugaison du miroir plan autant de fois qu'il est nécessaire.

→ Application

Deux miroirs plans M_1 et M_2 de même longueur forment un dièdre d'angle intérieur α . Les deux miroirs sont équidistants du sommet du dièdre. Un rayon incident parallèle à M_1 subit trois réflexions puis revient sur lui-même. Calculer α .



Solution

- ❶ Le problème posé ne fait pas référence à un objet mais au trajet suivi par un rayon lumineux.
- ❷ On utilise la loi de Snell-Descartes de la réflexion. Si le rayon repart en sens inverse au bout de la 3^e réflexion cela signifie qu'il arrive sous incidence nulle sur le miroir concerné, ici M_2 . On obtient ainsi la figure ci-contre :

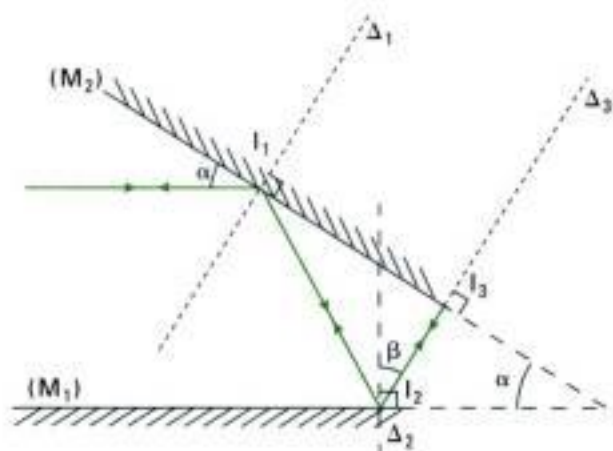
On a introduit sur cette figure les points de réflexion successifs I_1, I_2, I_3 et les normales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ associées respectivement aux points I_1, I_2 et I_3 .

L'angle β est égal à α car ses côtés sont perpendiculaires deux à deux avec l'angle du dièdre formé par M_1 et M_2 . Comme c'est aussi l'angle que fait le rayon réfléchi avec la normale Δ_2 , on en déduit que l'angle d'incidence en I_2 est aussi égal à α en utilisant la loi de Snell-Descartes de la réflexion. On a donc : $\widehat{I_1 I_2 I_3} = 2\alpha$.

Δ_1 et Δ_3 étant normales à M_2 , elles sont parallèles entre elles ce qui permet de déduire que l'angle de réflexion en I_1 est égal à 2α . L'angle d'incidence en I_1 est donc aussi égal à 2α .

Enfin, ce dernier résultat montre que l'angle droit situé entre Δ_1 et M_2 est égal à $\alpha + 2\alpha$, donc :

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

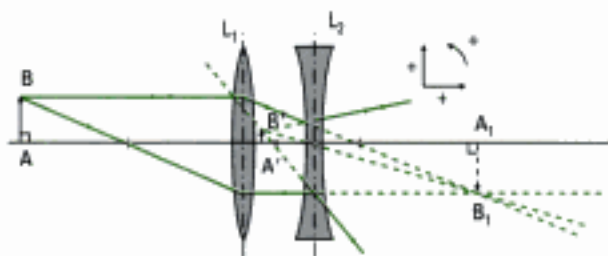


Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Objets et images

On considère l'association de deux lentilles centrées sur le même axe optique qui constitue une lunette de Galilée. On a représenté ci-dessous le trajet des rayons lumineux émis par un point objet B de l'objet AB (la justification du trajet suivi par ces rayons sera donnée dans le chapitre 5 consacré à l'étude des lentilles sphériques) :



Une première image A_1B_1 de AB est formée par L_1 , puis l'image définitive $A'B'$ est formée par L_2 , ce que l'on peut noter sous la forme :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

- AB est-il un objet pour L_1 ? pour L_2 ? pour l'association de L_1 et L_2 ? Préciser dans chaque cas la nature, réelle ou virtuelle, de l'objet AB .
- Préciser le rôle et la nature de A_1B_1 pour L_1 , L_2 et pour l'association des deux lentilles.
- Reprendre la question précédente pour $A'B'$.

Ex. 2 Le miroir plan

- Un faisceau de lumière parallèle arrive perpendiculairement à la surface d'un miroir plan. Dans quelle direction est réfléchi la lumière ?
- Une source ponctuelle émet deux rayons inclinés respectivement d'un angle de 25° et 60° avec la surface d'un miroir plan. Quels sont les angles de réflexion des deux rayons réfléchis ? Quel est l'angle formé par ces deux rayons ? Quelle est la déviation subie par le rayon le plus incliné sur la normale du miroir ?
- Une source laser S émet un pinceau lumineux de faible ouverture assimilé à un rayon lumineux. Celui-ci se réfléchit sur la surface d'un miroir plan placé à l'horizontale et avec une inclinaison de 37° sur la verticale. On place un écran d'observation perpendiculairement au plan du miroir, à la distance $D = 1,00$ m du point d'incidence I du rayon émis par S sur le miroir. Quelle est la hauteur minimale nécessaire de l'écran pour que l'on puisse y observer l'image de S ?

Ex. 3 Association de miroirs plans

a) Deux miroirs plans carrés M_1 et M_2 , de côté $h = 50$ cm, sont disposés face à face, parallèlement l'un à l'autre à une distance de 150 cm. On incline ensuite M_2 d'un angle de 5° sur la verticale. Entre ces deux miroirs est placée une source laser S émettant un rayon lumineux horizontal en direction de M_2 . Le rayon se réfléchit sur le bord inférieur de celui-ci. Déterminer le nombre de réflexions ayant lieu sur le miroir M_1 avant que le rayon ne ressorte de l'espace situé entre les deux miroirs.

b) Les deux miroirs précédents sont désormais parallèles et distants de D . Un point objet lumineux S est situé à la distance d du miroir M_1 sachant que S continue à émettre un rayon lumineux en direction de M_2 . Déterminer les positions des images de S formées par le système optique en prenant le point S comme origine des positions.

Niveau 2

Ex. 4 Indice de réfraction d'un cube en verre

Un observateur regarde à l'aide d'un viseur la face avant d'un cube en verre d'épaisseur $e = 15$ mm. Il se déplace d'une longueur $L = 10$ mm pour viser la face arrière. Déterminer l'indice de réfraction du verre.

Oral, CCP MP 1997

Ex. 5 Catadioptr

Le catadioptr (ou cataphote) est constitué de trois miroirs plans perpendiculaires deux à deux.

- Montrer que l'onde incidente ressort parallèle à elle-même après une, deux ou trois réflexions.
- Que peut-on dire de la nature de l'onde obtenue après réflexions(s) si l'onde incidente est plane ?

Oral, Centrale, Supélec MP 1998

Ex. 6 Aquarium dont la base est un miroir plan

Lorsqu'un aquarium est vide un point A du bord supérieur de l'aquarium donne une image A_1 à la distance $AA_1 = 1$ m. On remplit l'aquarium d'une hauteur d'eau $h = 30$ cm. Par rapport à la surface de l'eau, situer l'image A' de A .

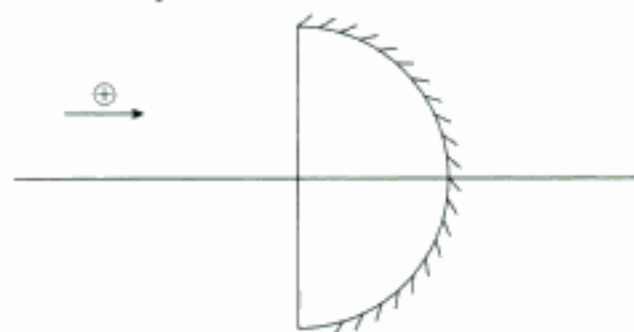
Ex. 7 Hauteur minimale d'un miroir plan

Quelle taille minimale doit avoir un miroir plan pour qu'un homme de 1,80 m puisse s'y voir entièrement ?

Oral, Polytechnique

Ex. 8 Demi-boule à surface réfléchissante

La résolution de cet exercice nécessite la lecture préalable du chapitre 4.



On considère une demi-boule transparente dont la partie ronde intérieure est réfléchissante.

- A-t-on stigmatisme ?
- Où est l'image d'un objet à l'infini, situé sur l'axe optique, dans les conditions de Gauss.

Oral, CCP MP 1997

Niveau 3

Ex. 9 Aberration géométrique d'une lentille plan convexe

Dans le domaine de l'optique un montage très simple permet de visualiser les aberrations géométriques d'une lentille convergente. On se propose dans cette partie d'étudier les rayons lumineux émergents et visibles dans la cuve :



Fig. 1

Ex. 6

Chaque face du cube en verre constitue un dioptré plan.

Ex. 7

Utiliser les coordonnées cartésiennes. Revoir la notion d'onde plane.

Ex. 8 et 10

Écrire les relations de conjugaison successives à travers chaque système optique rencontré par la lumière.

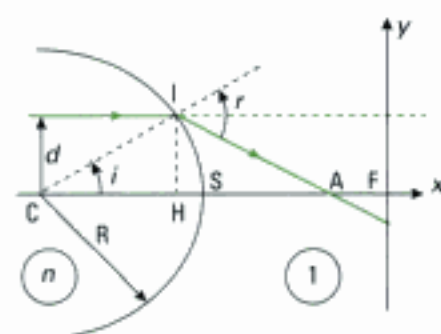


Fig. 2

Pour simplifier, on fera l'étude du comportement des rayons (monochromatiques) à la traversée d'un dioptré sphérique séparant un milieu d'indice n et un milieu d'indice que l'on prendra égal à 1.

- Établir la relation donnant \overline{CA} en fonction de $R = \overline{CS}$, n et i .

Déduire celle donnant \overline{CF} où F est le foyer (image) du dioptré.

- Quelle est la valeur limite d_c du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons ressortent de la lentille ?

1. Faire un développement limité au deuxième ordre en i et déduire une nouvelle expression de \overline{CA} en fonction de n , R et i .

2. Déduire celle de \overline{AF} .

3. Tracer le trajet suivi par 5 rayons pour lesquels la distance d à l'axe optique vaut respectivement $d_1 = 1$ cm, $d_2 = 2$ cm, $d_3 = 3$ cm, $d_4 = 4$ cm et $d_5 = 5$ cm. On prendra pour le graphique uniquement $n = 2$ et $R = 10$ cm (échelle 1).

4. Pour quel rayon particulier a-t-on \overline{AF} maximum ?

5. Donner qualitativement l'allure de ce qui est observé si l'on place un écran en :

- \overline{AF}_{\max}
- $\frac{\overline{AF}_{\max}}{2}$
- juste avant F .

D'après écrit Centrale, Supélec 1995.

Indications

Ex. 9

Faire une construction géométrique de l'image, des rayons issus de l'œil puis faire apparaître des triangles semblables.

Ex. 11

Lors du passage d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent, un rayon lumineux peut être réfracté si l'angle de réfraction est inférieur à l'angle de réfraction limite.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) • Le point objet B émet un faisceau lumineux conique divergent sur L_1 : B et un point objet réel pour L_1 et donc **AB est un objet réel pour L_1** .

Remarque : on peut également dire que AB appartient à l'espace objet réel de L_1 et qu'il est donc un objet réel.

• Le point objet B n'émet pas un faisceau incident de sommet B sur L_2 : **AB n'est pas un objet pour L_2** .

Remarque : AB n'appartient pas à l'espace objet réel de L_2 car cet espace est limité par la présence de la lentille L_1 .

• Le point objet B émet un faisceau lumineux conique divergent pour l'ensemble des 2 lentilles associées (et il est situé dans l'espace objet réel de ce système optique). **AB est donc un objet réel pour l'association de L_1 et L_2** .

b) • B_1 est le point de convergence du faisceau émergent conique de L_1 : **A_1B_1 est une image réelle pour L_1** .

• Ce même faisceau conique converge sur L_2 : **A_1B_1 est un objet virtuel pour L_2** .

• B_1 n'est ni un point de convergence ni de divergence pour l'association des 2 lentilles. A_1B_1 n'est donc ni un objet ni une image pour l'association des 2 lentilles (plus simplement, il n'est rien pour le système).

c) De même, on obtient que :

• **$A'B'$ n'est ni un objet ni une image pour L_1 ;**

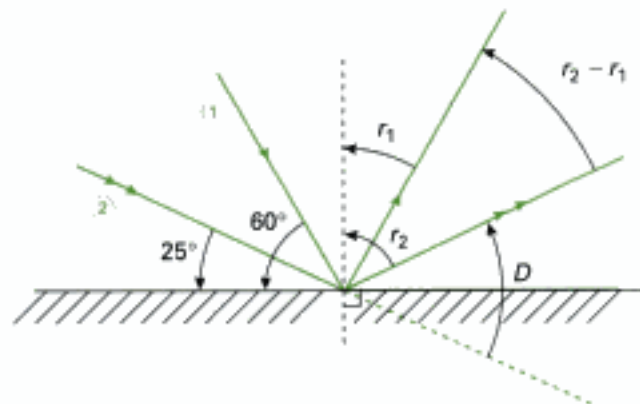
• **$A'B'$ est une image virtuelle pour L_2 ;**

• **$A'B'$ est une image virtuelle pour l'association des 2 lentilles.**

Exercice 2

a) L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence qui est ici nul. Donc **la lumière se réfléchit perpendiculairement à la surface du miroir** et revient sur elle-même.

b) La seule difficulté consiste à effectuer une construction géométrique, en utilisant la loi de Snell-Descartes de la réflexion pour tracer les deux rayons réfléchis :

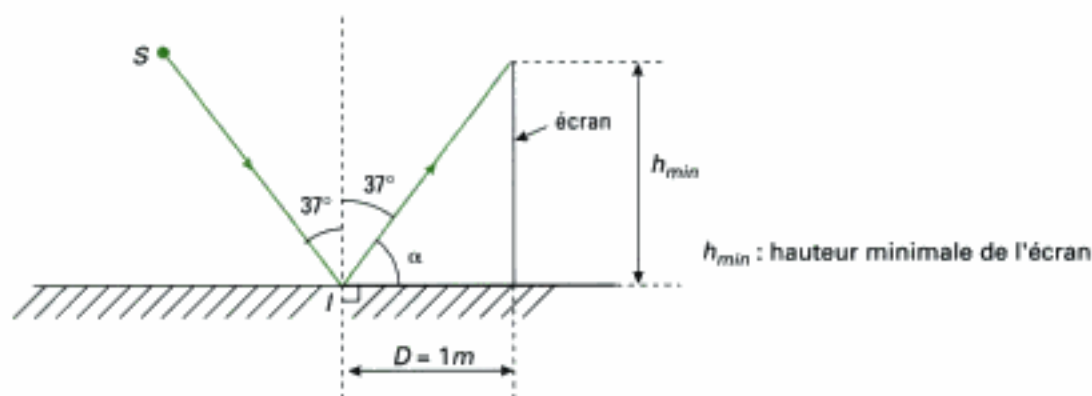


on a donc : $r_1 = 30^\circ$, $r_2 = 65^\circ$ et $r_2 - r_1 = 35^\circ$.

On a choisi sur cette figure d'orienter les angles dans le sens trigonométrique car la déviation D est une grandeur algébrique.

Le rayon ② est le plus incliné sur la normale au miroir. La déviation D qu'il subit au cours de sa réflexion s'exprime selon : $180^\circ - 2r_2 = 50^\circ$.

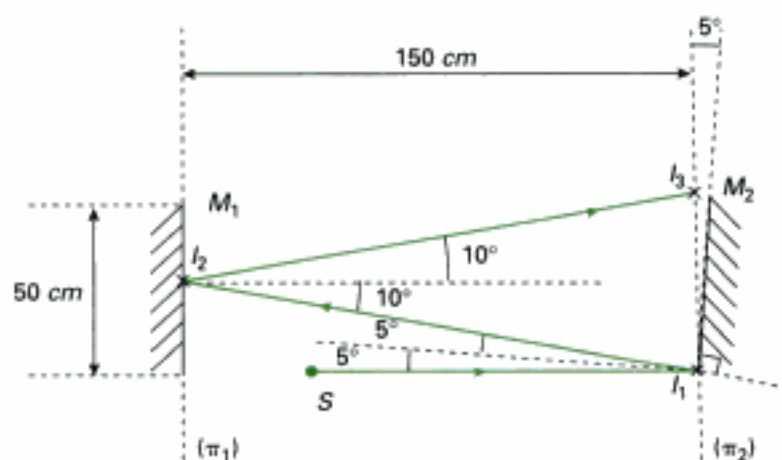
c) On effectue la construction géométrique :



On a donc : $h_{\min} = D \cdot \tan \alpha = D \cdot \tan (90^\circ - 37^\circ) = 1,33 \text{ m}$.

Exercice 3

a) On effectue une construction géométrique (méthode 2) :



Après réflexion du rayon lumineux sur M_1 en I_2 , le rayon passe par le point I_1 appartenant au plan vertical (π_2) .

Avec : $I_1 I_3 = I_1 I_2 + I_2 I_3 = 2 \times 150 \times \tan 10^\circ \approx 53 \text{ cm} > 50 \text{ cm}$.

Il n'y a donc pas de nouvelle réflexion sur M_2 car le rayon passant par I_3 passe au-dessus de M_2 . Par conséquent, **il n'y a qu'une seule réflexion sur le miroir M_1 .**

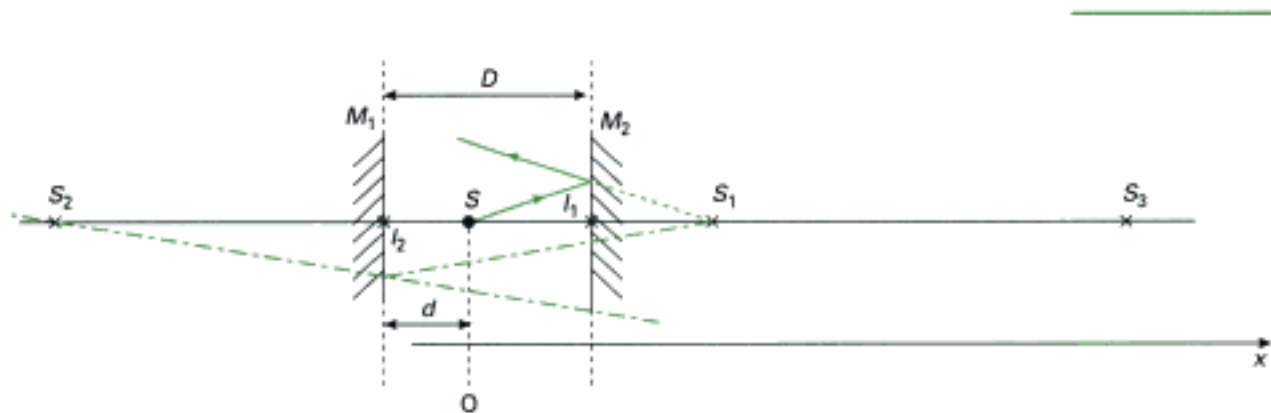
b) Il y a deux séries d'images qui se forment dans le système optique étudié. En effet, S émet à la fois des rayons en direction de M_1 et de M_2 qui chacun forment deux premières images S_1 et S'_1 qui à leur tour donneront lieu à deux autres images et ainsi de suite. On peut résumer la situation selon :

$$S \xrightarrow{M_2} S_1 \xrightarrow{M_1} S_2 \xrightarrow{M_2} S_3 \xrightarrow{M_1} S_4 \rightarrow \dots \text{ (1}^\circ \text{ série)}$$

et

$$S \xrightarrow{M_1} S'_1 \xrightarrow{M_2} S'_2 \xrightarrow{M_1} S'_3 \xrightarrow{M_2} S'_4 \rightarrow \dots \text{ (2}^\circ \text{ série)}$$

Sur la figure suivante, nous avons représenté les premières images formées par réflexions successives pour la 1^{re} série :



On obtient donc :

$$\overline{SS_1} = 2 \times \overline{SI_1} = 2(D - d)$$

puis $\overline{SS_2} = \overline{SS_1} + \overline{S_1S_2} = 2(D - d) + 2 \times \overline{S_1I_2} = 2(D - d) - 2(2D - d) = -2D$

puis $\overline{SS_3} = \overline{SS_2} + \overline{S_2S_3} = -2D + 2 \times \overline{S_2I_1} = -2D + 2 \times (\overline{S_2S} + \overline{SI_1}) = 4D - d$

puis $\overline{SS_4} = \overline{SS_3} + \overline{S_3S_4} = 4D - 2d + 2 \times \overline{S_3I_2} = -4D = 2 \times \overline{SS_2}$

On remarque une relation de récurrence définissant la position de l'image de S obtenue après N réflexions en distinguant N pair ou impair, avec :

pour N pair, $\overline{SS_N} = -N \cdot D$

pour N impair, $\overline{SS_N} = -2d + (N + 1)D$

On procède de même pour déterminer les positions des images successives de la 2^e série et on obtient :

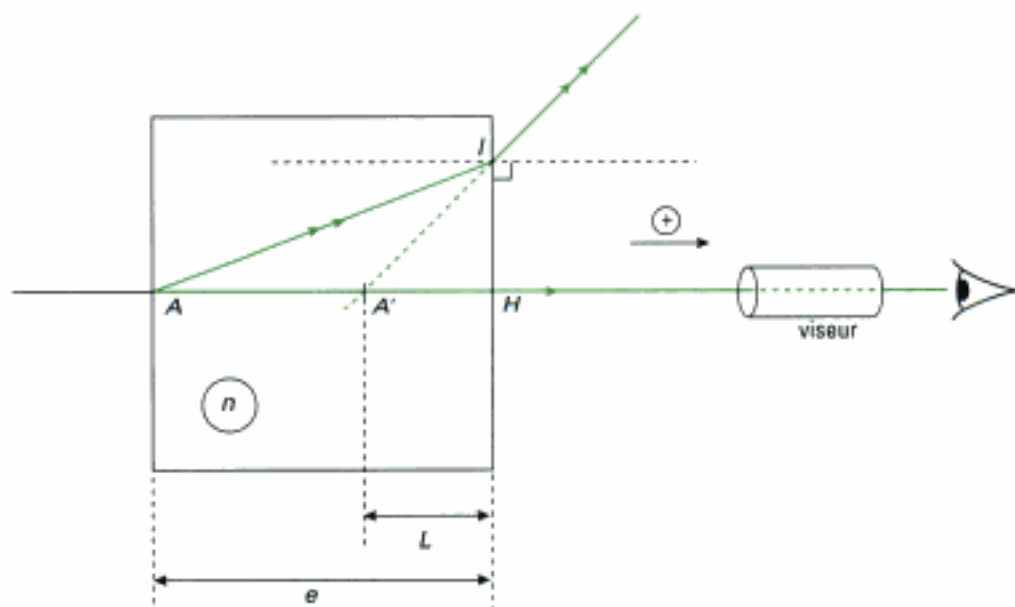
pour N pair, $\overline{SS_N} = N \cdot D$

pour N impair, $\overline{SS_N} = -2d - (N - 1)D$

Exercices de niveau 2

Exercice 4

Le déplacement L n'est pas égal à l'épaisseur e du cube car la face avant de celui-ci constitue un dioptre plan séparant deux milieux d'indice de réfraction différents (méthode 1) :



A', image de A à travers le dioptre passant par H, repère la position qui est visée pour la face


arrière.

On utilise la relation de conjugaison du dioptré plan obtenue dans le cas du stigmatisme approché puisque le rayon lumineux correspondant à la visée est perpendiculaire à la face avant du cube : $n \cdot \overline{HA'} = \overline{HA}$ avec n l'indice de réfraction du verre.

Ici : $HA = e$ et $HA' = L$, donc $n = \frac{e}{L}$

A.N. : $n = \frac{15}{10} = 1,5.$

Exercice 5

- a)  Compte tenu de la position relative des miroirs, il est ici intéressant d'introduire les coordonnées cartésiennes dans un repère $(Oxyz)$ dont les vecteurs unitaires seront notés (e_x, e_y, e_z) . Nous supposons de plus que les trois miroirs définissent les plans (xOy) , (yOz) et (zOx) .

Notons (α, β, γ) les coordonnées du vecteur unitaire \vec{u} donnant la direction de l'onde incidente : $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y + \gamma \cdot \vec{e}_z$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$).

Après une première réflexion sur le miroir contenu dans (yOz) , le vecteur unitaire donnant la direction de l'onde réfléchie s'écrit $-\alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y + \gamma \cdot \vec{e}_z$.

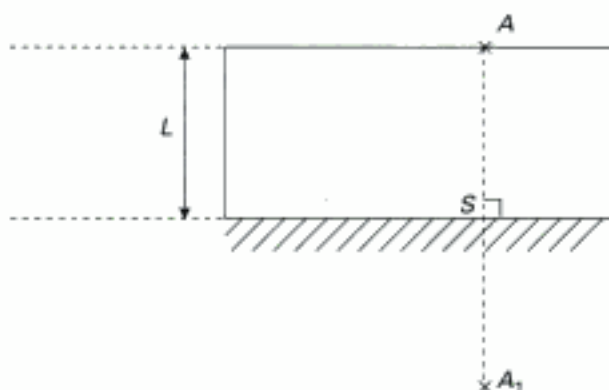
Après la deuxième réflexion sur le miroir contenu dans (xOz) , l'onde est dirigée selon $-\alpha \cdot \vec{e}_x - \beta \cdot \vec{e}_y + \gamma \cdot \vec{e}_z$. Enfin, après les 3 réflexions l'onde est dirigée selon $-\alpha \cdot \vec{e}_x - \beta \cdot \vec{e}_y - \gamma \cdot \vec{e}_z = -\vec{u}$:

elle est donc bien parallèle à la direction de l'onde incidente.

Remarques : cette étude englobe les cas particuliers où seulement 2 ou 1 réflexion ont lieu (exemple : $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \vec{u}' = -\alpha \cdot \vec{e}_x$). De plus, l'étude précédente ne dépend pas de l'ordre dans lequel s'effectuent les réflexions.

- b) Le vecteur unitaire \vec{u}' donnant la direction de propagation de l'onde réfléchie est colinéaire à \vec{u} . Les plans d'onde de l'onde réfléchie sont donc parallèles à ceux de l'onde incidente. **L'onde réfléchie est donc nécessairement plane.**

Exercice 6

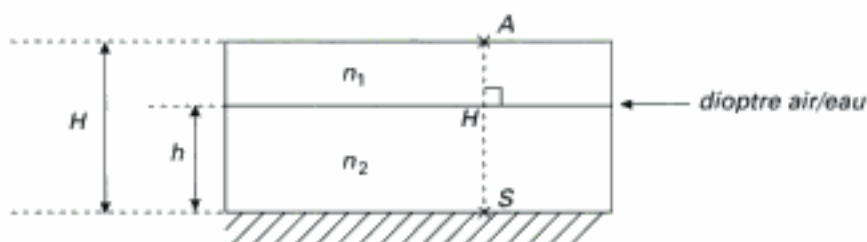


Commençons par étudier la situation où l'aquarium est vide :

On utilise la relation de conjugaison du miroir plan qui permet de déterminer la hauteur L de l'aquarium :

$$\overline{SA} = -\overline{SA_1} \Rightarrow L = \frac{AA_1}{2} = \frac{1 \text{ m}}{2} = 50 \text{ cm.}$$

Étudions à présent le cas où l'aquarium est rempli d'une hauteur d'eau égale à h :



On a donc les conjugaisons suivantes : $A \xrightarrow{\text{dioptré}} A_1 \xrightarrow{\text{miroir}} A_2 \xrightarrow{\text{dioptré}} A'$

Il suffit alors d'écrire successivement les relations de conjugaison pour déterminer la position de l'image A' de A .

$$\textcircled{1} A \xrightarrow{\text{dioptr}} A_1 : n_2 \cdot \overline{HA} = n_1 \cdot \overline{HA}_1 \text{ avec : } n_1 = 1 \text{ (air), } n_2 = 1,33 \text{ (eau)} \Leftrightarrow \overline{HA}_1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \overline{HA} \quad (1)$$

Remarque : A_1 est situé dans l'air.

$$\textcircled{2} A_1 \xrightarrow{\text{miroir}} A_2 : \overline{SA}_2 = -\overline{SA}_1 = -(\overline{SH} + \overline{HA}_1), \text{ avec (1) on a } \overline{SA}_2 = -\overline{SH} - \frac{n_2}{n_1} \cdot \overline{HA} \quad (2)$$

Remarque : A_2 est situé sous la base de l'aquarium.

$$\textcircled{3} A_2 \xrightarrow{\text{dioptr}} A' : n_1 \cdot \overline{HA}_2 = n_2 \cdot \overline{HA}' \Leftrightarrow \overline{HA}' = \frac{n_1}{n_2} \cdot \overline{HA}_2 = \frac{n_1}{n_2} (\overline{HS} + \overline{SA}_2)$$

avec (2), on obtient :

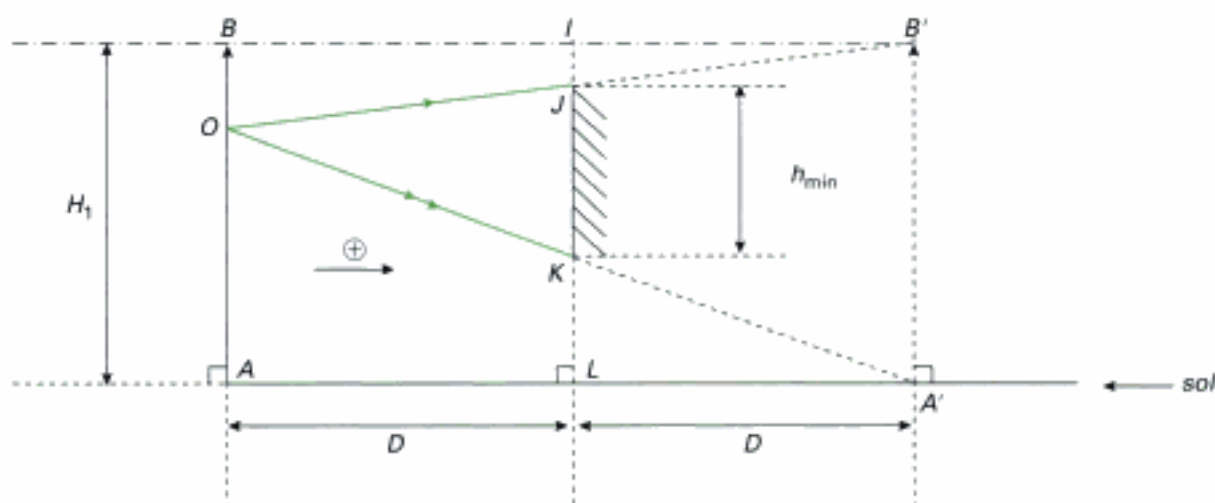
$$\overline{HA}' = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\overline{HS} - \overline{SH} - \frac{n_2}{n_1} \cdot \overline{HA})$$

$$\text{soit : } \boxed{\overline{HA}' = 2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \overline{HS} - \overline{HA}}$$

A.N. : l'usage des valeurs algébriques nécessite le choix d'une orientation de la verticale. Choisissons par exemple le sens positif vers le bas. Ainsi : $\overline{HA}' = 2 \cdot \left(\frac{1}{1,33}\right) \cdot (0,3 - (-0,2)) = 0,65 \text{ m}$.

Exercice 7

On commence par effectuer une construction géométrique de l'image $A'B'$ d'un homme AB en notant O la position de l'œil. On ajuste sur la construction la hauteur du miroir pour que l'homme puisse s'y voir entièrement. La distance D entre l'objet AB et le miroir n'est pas précisée dans l'énoncé :



$A'B'$ est virtuelle et symétrique de AB par rapport au plan du miroir.

Cette figure nous montre que : $h_{\min} = H_1 - IJ - KL \quad (1)$

Le théorème de Thalès appliqué dans les triangles semblables $(A'KL)$ et $(A'AO)$ donne :

$$\frac{KL}{OA} = \frac{D}{2D} \Leftrightarrow KL = \frac{OA}{2} \quad (2)$$

De même dans les triangles semblables $(B'IJ)$ et $(B'BO)$: $\frac{IJ}{BO} = \frac{D}{2D} \Leftrightarrow IJ = \frac{BO}{2} \quad (3)$

Reportons (2) et (3) dans (1)

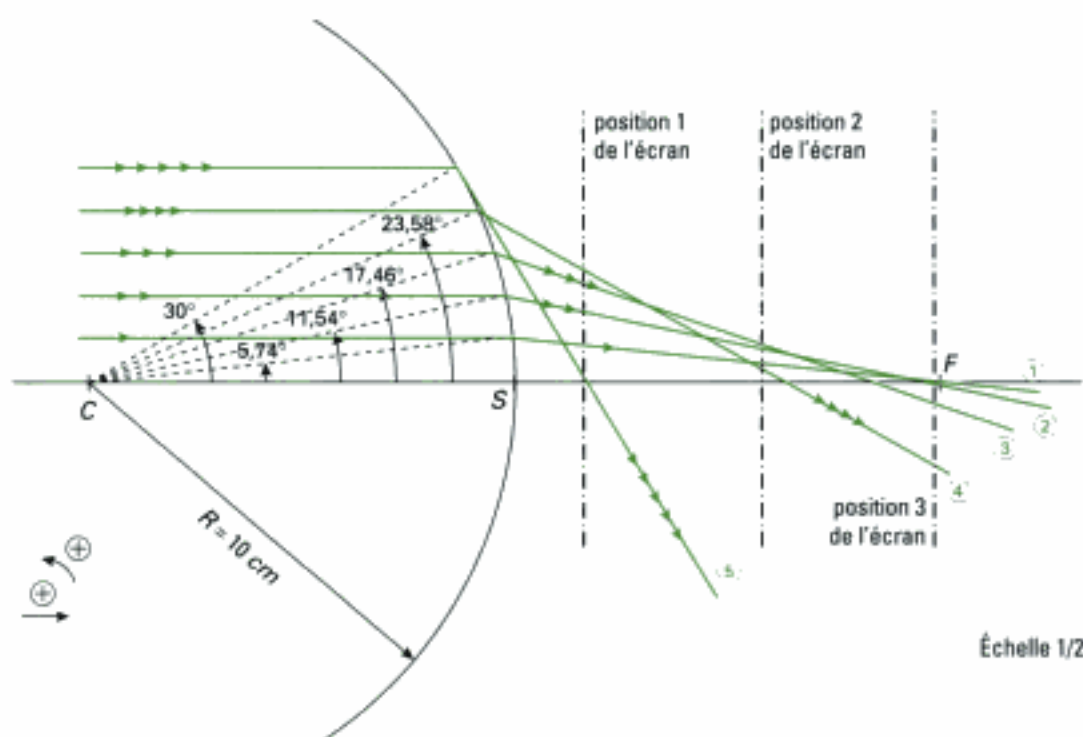
$$h_{\min} = H_1 - \frac{BO}{2} - \frac{OA}{2} \text{ avec } BO + OA = AB = H_1.$$

Hidden page

Hidden page

d (cm)	1	2	3	4	5
$\sin i = \frac{d}{R} = \frac{d}{10}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
i ($^\circ$)	5,74	11,54	17,46	23,58	30
\overline{CA} calculée avec $n = 2$ (cm)	19,79	19,17	18,05	16,2	11,54

d'où :



c. 4) Le tracé précédent montre que \overline{AF} est maximum lorsque $d = 5$ cm avec :

$$\overline{CA} = 11,54 \text{ cm} ; \overline{CF} = \frac{n \cdot R}{n - 1} = 20 \text{ cm} \Rightarrow \overline{AF}_{\max} = 8,45 \text{ cm.}$$

c. 5) Ce cas correspond au **rayon émergent** ⑤.

- écran placé en \overline{AF}_{\max} (position 1 de l'écran) : on observe une tache lumineuse circulaire avec un point plus lumineux au centre.
- écran placé en $\overline{AF}_{\max}/2$ (position 2) : la tache lumineuse circulaire est plus petite. Le centre est moins lumineux et le périmètre de la tache est plus lumineux.
- écran placé juste avant F (position 3) : tache lumineuse circulaire de diamètre plus élevé et dont le centre est beaucoup plus lumineux que le reste de la tache (présence d'un fort contraste). C'est pour cette position que l'image est acceptable ce qui correspond aux conditions de Gauss (rayons peu inclinés sur l'axe optique).

Remarque : l'allure de ces taches images est donnée à la figure 11 du chapitre 5.

Introduction

Les surfaces réfléchissantes des miroirs permettent de *changer le sens de propagation de la lumière*.

Le miroir plan est le plus utilisé dans la vie courante mais on utilise aussi les miroirs sphériques comme miroirs de salle de bains grossissants, comme rétroviseur à grand champ ou encore pour sécuriser certaines intersections routières.

Dans les instruments d'optique, les miroirs sont nécessairement utilisés quand les dioptries habituels ne sont plus transparents pour le rayonnement étudié. En particulier, on trouve les miroirs dans les télescopes, dont le premier modèle fût élaboré en 1668 par Newton. En effet, à la différence des lunettes astronomiques, à base de lentilles, les télescopes n'ont pas d'aberration chromatique car la lumière réfléchie ne traverse aucun milieu constituant le miroir. De plus, on sait fabriquer des miroirs de grand rayon, ce qui n'est pas le cas pour les lentilles.

Plan du chapitre 4

A. Introduction	102
B. Stigmatisme et aplanétisme d'un miroir sphérique	103
C. Construction géométrique d'une image dans les conditions de Gauss	109
D. Relations de conjugaison du miroir sphérique dans l'approximation de Gauss ..	116
E. Cas particulier du miroir plan	119
F. Champ d'un miroir	120
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	121
<i>Énoncés des exercices</i>	126
<i>Solutions des exercices</i>	130

A. Introduction

Définition 1

Un miroir sphérique¹ est une portion de sphère parfaitement réfléchissante sur l'une de ses faces.

1. En pratique, les miroirs de télescopes sont essentiellement paraboliques car leur stigmatisme est satisfaisant dans le cas de rayons non paraxiaux.

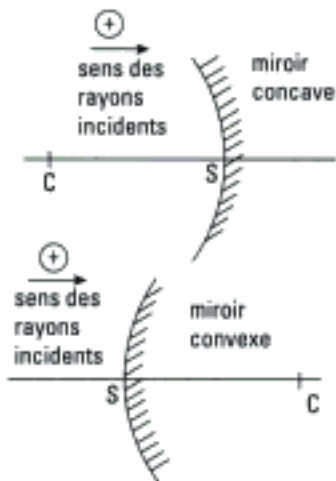


Fig. 1

La surface réfléchissante est toujours symbolisée par une surface hachurée.

L'angle d'ouverture α , du miroir est l'angle sous lequel est vu le miroir depuis son centre (fig. 2).

2. Dans le cas du miroir convexe, les rayons lumineux s'éloignent de l'axe optique après réflexion alors qu'ils s'en rapprochent dans le cas du miroir concave.

Selon la position de la couche réfléchissante, deux types de miroirs sphériques sont rencontrés : lorsqu'elle est située à l'intérieur de la sphère le miroir est dit **concave** ; si elle est à l'extérieur le miroir est dit **convexe** (fig. 1).

Le centre C de la sphère est appelé **centre du miroir sphérique**. L'axe de révolution du miroir, aussi appelé axe optique du miroir, passe par C et par le point S appelé **sommet du miroir sphérique** (fig. 1 et 2). Le miroir est un système centré, de révolution autour de son axe.

Le rayon CS de la sphère est appelé **rayon du miroir sphérique**. L'espace étant orienté dans le sens des rayons incidents, avec la convention de la figure 1, la mesure algébrique \overline{CS} est positive si le miroir est concave et négative s'il est convexe.

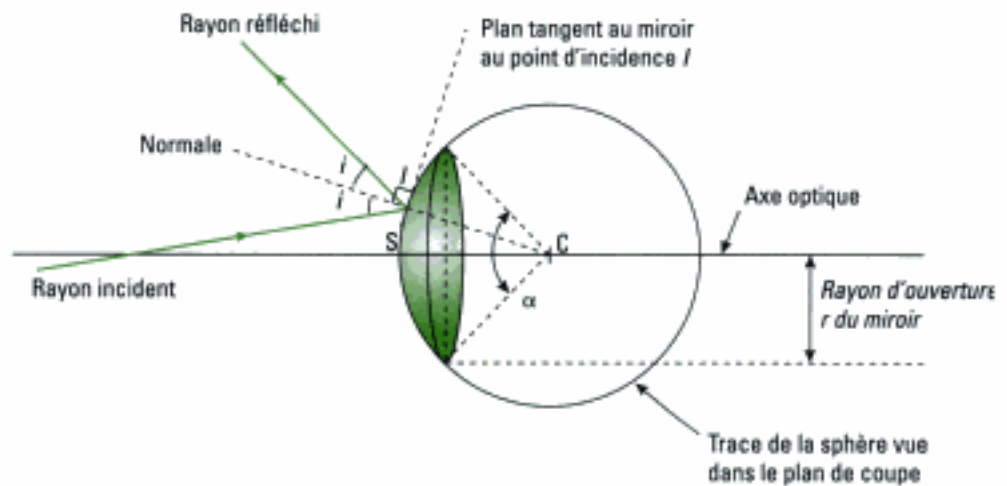


Fig. 2

Miroir sphérique convexe représenté dans l'espace.

Le miroir concave est un système optique convergent ; le miroir convexe² est divergent. Ces propriétés sont illustrées en figure 3.

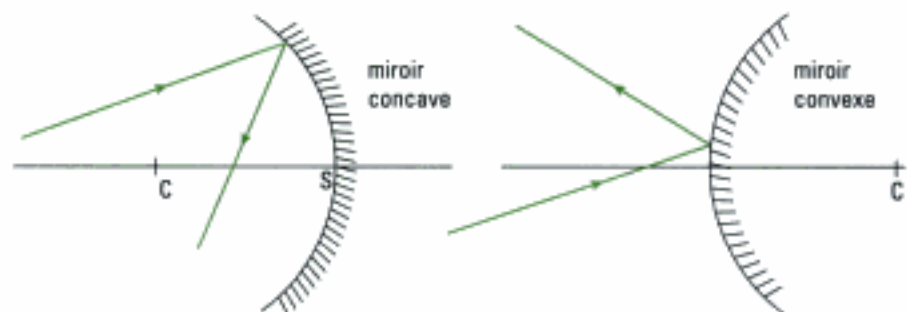


Fig. 3

Convergence des rayons réfléchis pour un miroir concave ou divergence pour un miroir convexe

B. Stigmatisme et aplanétisme d'un miroir sphérique

Dans ce paragraphe nous travaillerons sur des simulations de trajets de rayons lumineux relatives au miroir sphérique. Ceci nous permettra de mettre en évidence les conditions pour lesquelles ce système peut être considéré comme stigmatique et aplanétique.

B.1. Étude du stigmatisme du miroir sphérique

Le miroir sphérique M étudié est concave ; l'étude aurait aussi bien pu être menée avec un miroir convexe.

• Première étude

Le miroir est éclairé par une source ponctuelle A , monochromatique, située sur l'axe optique, à grande distance du miroir sphérique. Vu du miroir, A est donc supposée à l'infini. De ce fait, les rayons qui arrivent sur le miroir, de la gauche vers la droite dans les figures, sont parallèles.

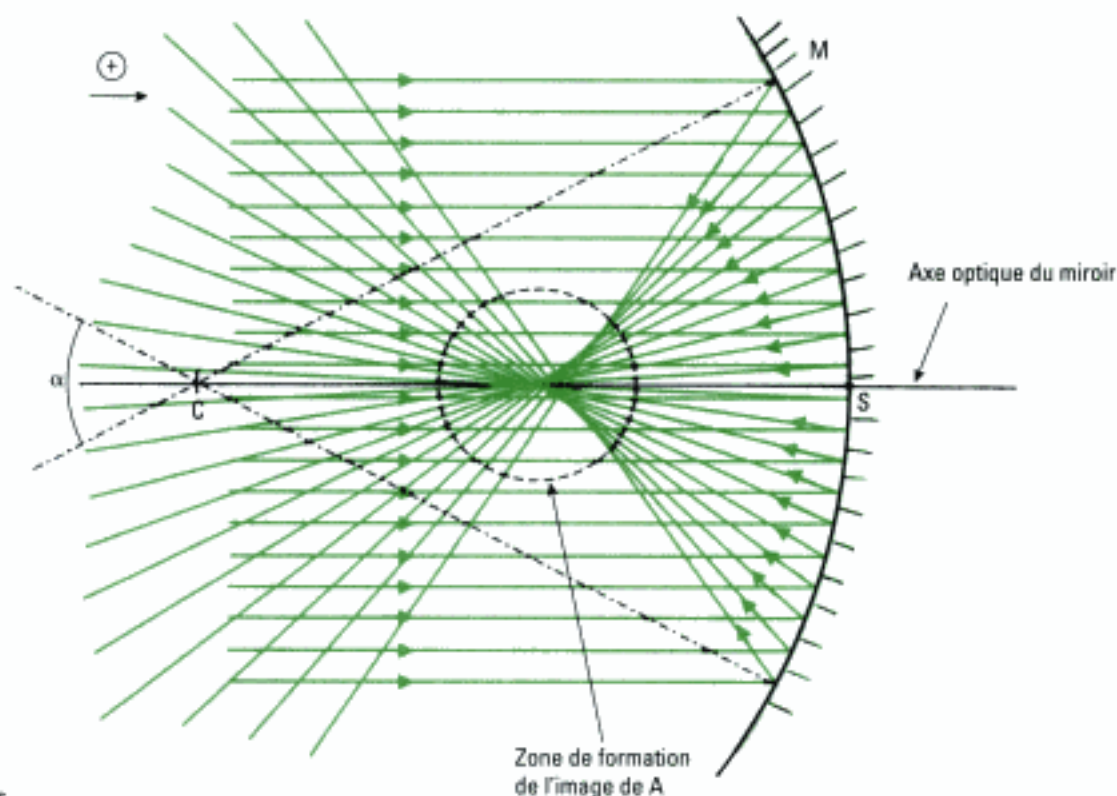


Fig. 4

Simulation de trajets lumineux pour un miroir sphérique concave éclairé par une source à l'infini sur l'axe, le faisceau incident étant de grande ouverture

Nous observons ici une aberration géométrique dite de sphéricité : les rayons réfléchis ne convergent pas en un même point mais sont tangents aux deux nappes d'une surface dite caustique (fig. 5).

Nous remarquons tout d'abord que l'ouverture α du faisceau est grande (ici voisine de 55°). Nous observons donc que l'image de A donnée par le miroir M n'est pas ponctuelle. En effet, tous les rayons réfléchis par M ne convergent pas en un même point : il s'agit plutôt d'une zone de formation de l'image. Un agrandissement de la figure 4 nous confirme cette observation (fig. 5a) :

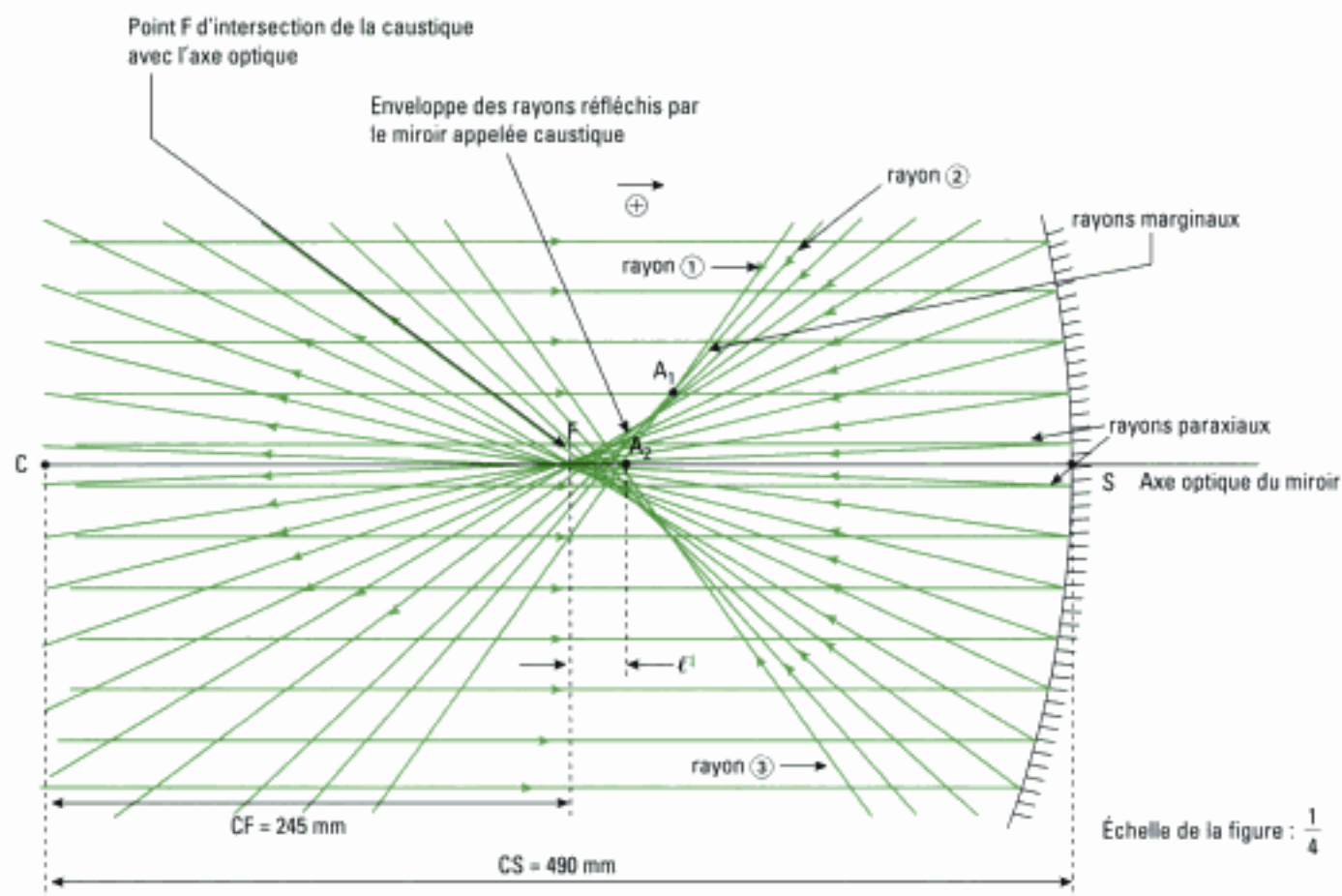


Fig. 5a

1. La distance f , entre F et le point de convergence des rayons marginaux situé le plus près du miroir, est appelée aberration longitudinale. Plus l'aberration de sphéricité est grande, plus l'aberration longitudinale est grande.

Un nouvel agrandissement permet de préciser la zone de convergence des rayons lumineux (fig. 5b). Noter que les rayons réfléchis par les bords du miroir (rayons dits *marginaux*) convergent entre le point F et le miroir. Un rayon converge d'autant plus près du miroir qu'il est marginal, c'est à dire d'incidence située loin de l'axe optique.

Les rayons peu éloignés de l'axe convergent sensiblement vers le point F. Ces rayons sont des rayons *paraxiaux* qui convergent dans un petit volume d'espace. Si le stigmatisme rigoureux était vérifié, les rayons incidents, tous issus de A_1 , devraient après réflexion converger en un même point A' . Ceci n'est pas vrai ; par exemple, les rayons ① et ② se coupent en A_1 mais ① et ③ se coupent en A_2 (fig. 5a).

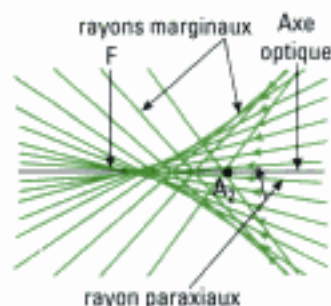


Fig. 5b

La surface réfléchissante est toujours symbolisée par une surface hachurée.

Le miroir sphérique éclairé comme ici avec un faisceau de grande ouverture (grande différence d'angle d'incidence entre les rayons marginaux et paraxiaux) n'est pas rigoureusement stigmatique. L'image présente des aberrations transversales (par exemple la distance entre le point A_1 et l'axe optique) et des aberrations longitudinales (distance entre F et A_2) (fig. 5a).

Vu l'étendue de la zone de formation des images, le miroir sphérique éclairé avec un faisceau de grande ouverture n'est pas stigmatique au sens du stigmatisme approché.

Cette absence de stigmatisme est due à une aberration géométrique provoquée par la grande ouverture du faisceau incident ($\alpha = 60^\circ$). La sphéricité du miroir intervient dans la mesure où l'angle des rayons réfléchis est grand pour les rayons marginaux et limité pour les rayons paraxiaux. Il s'agit de l'aberration de sphéricité.

Il n'y a donc *ni stigmatisme rigoureux ni stigmatisme approché*² pour un miroir sphérique éclairé par un faisceau de large ouverture.

2. La question du stigmatisme approché est bien entendu liée à la taille du photorécepteur considéré.

Hidden page

reusement stigmatique ni stigmatique approché. Toutefois, nous constatons à nouveau que les rayons paraxiaux convergent en une zone d'espace de petit volume dont la coupe a été mise en évidence sur la figure 7 (zone centrée autour du point Φ).

Cette figure montre en outre que pour un faisceau de large ouverture et peu incliné sur l'axe optique d'un miroir sphérique, les observations faites dans la direction de ce faisceau sont sensiblement comparables¹ à celles faites avec un faisceau incident parallèle à l'axe du miroir.

Il existe cette fois un point Φ , différent de F , entouré d'une petite zone d'espace où les rayons paraxiaux convergent.

En réduisant l'ouverture d'un faisceau incident, peu incliné sur l'axe, seuls subsistent les rayons paraxiaux pour former l'image. Le miroir sphérique vérifie le stigmatisme approché : l'image d'un point à l'infini sur l'axe est une tache de petite dimension² alors que nous assimilons au point F de l'axe ; l'image d'un point à l'infini en dehors de l'axe est une tache de petite dimension que nous assimilons à un point Φ en dehors de l'axe.

• Troisième étude

En pratique, il est donc nécessaire d'utiliser un diaphragme \mathcal{D} pour limiter la section du faisceau incident lumineux. Reprenons les conditions expérimentales de la figure 4 en ajoutant un diaphragme \mathcal{D} sur la figure suivante :

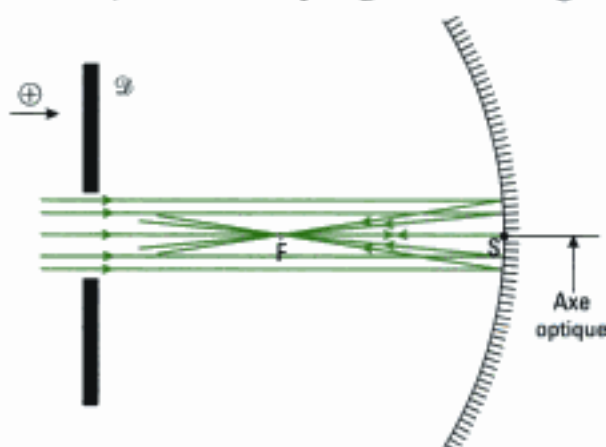


Fig. 8

Utilisation d'un diaphragme dans le cas d'une source à l'infini sur l'axe.

Nous constatons logiquement que tous les rayons incidents convergent à présent dans une zone peu étendue de l'espace.

Un miroir sphérique, éclairé par un faisceau peu ouvert et peu incliné sur l'axe, vérifie les conditions du **stigmatisme approché**³.

En reprenant la figure 2, nous pouvons compléter notre étude par deux observations :

- dans le cas particulier où l'angle d'incidence est nul, nous observons que pour tout point d'incidence I , le support du rayon incident passe par C et que le rayon réfléchi est porté par la direction de ce support. Le point C est son propre conjugué⁴ ;
- tout point I de la surface du miroir est son propre conjugué et ceci est vrai en particulier pour le sommet S du miroir.

Ces deux observations nous permettent donc d'énoncer la propriété suivante :

Propriété 1

Il y a stigmatisme rigoureux pour le centre C et tous les points de la surface du miroir, en particulier le sommet S du miroir.

1. Comparables à l'aberration de coma près.

2. Ici, encore, les questions de dimension de la tache sont liées au mode d'observation de celle-ci.

Ici l'aberration de coma n'existe pas et l'aberration de sphéricité est atténuée car l'ouverture du faisceau lumineux est diminuée.

3. En l'absence d'informations sur le capteur, nous pouvons considérer à ce stade que la condition $\ell \ll r$ (où r est le rayon d'ouverture du miroir) fait que le stigmatisme est approché.

4. Ainsi tout rayon dont le support passe par le centre du miroir est réfléchi sur lui-même.

Hidden page

Par contre, pour des angles inférieurs ou égaux à 10° , les positions de l'image (Φ_1 par exemple) sont très proches du plan π et nous admettrons qu'il existe alors une correspondance de plan de front à plan de front.

Ces conditions sont aussi celles du stigmatisme approché précédemment défini.

Lorsque les conditions de stigmatisme approché sont vérifiées, **il y a aussi aplanétisme approché** pour le miroir sphérique.

Conclusion

Un miroir sphérique peut être considéré stigmatique et aplanétique au sens du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés :

- si les rayons sont peu éloignés de l'axe (fig. 4, 5, 6 et 8) ;
- si les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique (fig. 6, 7 et 9).

Ces conditions du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés sont **les conditions de Gauss**.

Par conséquent, un faisceau peu ouvert et peu incliné sur l'axe vérifie ces conditions.

Sur la figure suivante, nous avons simulé les rayons lumineux émis par un objet ponctuel A, situé sur l'axe. Les rayons sont proches de l'axe, peu inclinés sur l'axe : les conditions de Gauss sont vérifiées et ainsi les rayons convergent avec une très bonne approximation en un point image A', après réflexion sur le miroir concave :

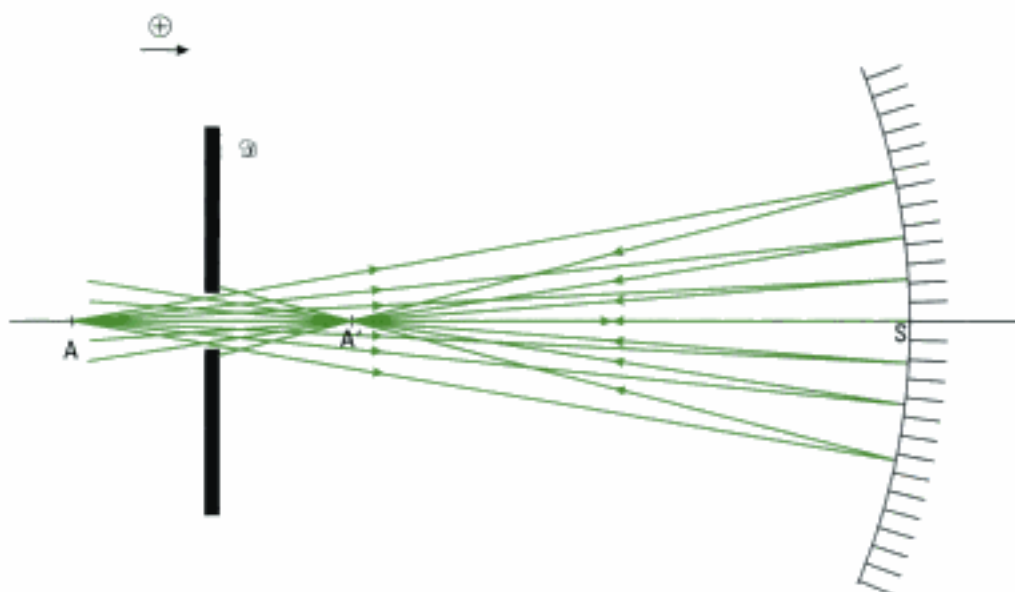


Fig. 10

Miroir sphérique concave utilisé dans les conditions de Gauss.

Dans la suite, tous les systèmes optiques à base de miroirs que nous envisagerons seront utilisés dans les conditions de Gauss. Dans ces conditions, la portion éclairée du miroir sphérique, centrée sur l'axe optique, doit être peu étendue en regard notamment des dimensions d'ouverture du miroir (r et α). Les symboles du miroir sphérique utilisé dans les conditions de Gauss sont alors :

Hidden page

Hidden page

Définition 6

La grandeur **algébrique** \overline{SF} est appelée distance focale ; elle est notée f et on a :

$$f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Unité : une distance focale s'exprime en mètres (m).

Remarques :

- il faut noter que selon l'usage cette grandeur est appelée « distance » mais il s'agit cependant d'une grandeur algébrique ;
- lorsque le miroir est convergent (donc concave) sa distance focale est négative ; elle est positive s'il est divergent (convexe).

Définition 7

La vergence V du miroir sphérique est l'inverse de la distance focale. Ainsi :

$$V = \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{f}$$

Unité : une vergence s'exprime en dioptries (δ) avec $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$.

C.3. Construction du rayon réfléchi correspondant à un incident donné

1. En situation d'exercice, cette connaissance n'est évidemment pas systématique et l'on peut par exemple avoir à déterminer la position d'un foyer, d'un objet. Il faudra alors adapter le raisonnement.

Nous supposons dans la suite de ce cours que la position du foyer¹, du sommet et du centre des miroirs étudiés sont connus.

Pour réaliser la construction du rayon réfléchi correspondant à un incident donné, nous utiliserons les propriétés mises en évidence précédemment :

- tout rayon passant par le centre du miroir revient sur lui-même après réflexion ;
- un rayon incident parallèle à l'axe optique se réfléchit en passant par le foyer du miroir concave (et en semblant provenir du foyer d'un miroir convexe).

Le principe de retour inverse de la lumière permet de déduire du cas particulier précédent :

- un rayon incident passant par le foyer du miroir se réfléchit parallèlement à l'axe optique ;

D'autre part, la loi de Snell-Descartes de la réflexion indique que :

- tout rayon incident au point S se réfléchit au sommet S du miroir symétriquement par rapport à l'axe optique.

La figure 14 illustre ces quatre rayons particuliers :

Rappelons que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion seulement en S si l'on utilise la modélisation symbolique du miroir sphérique réel.

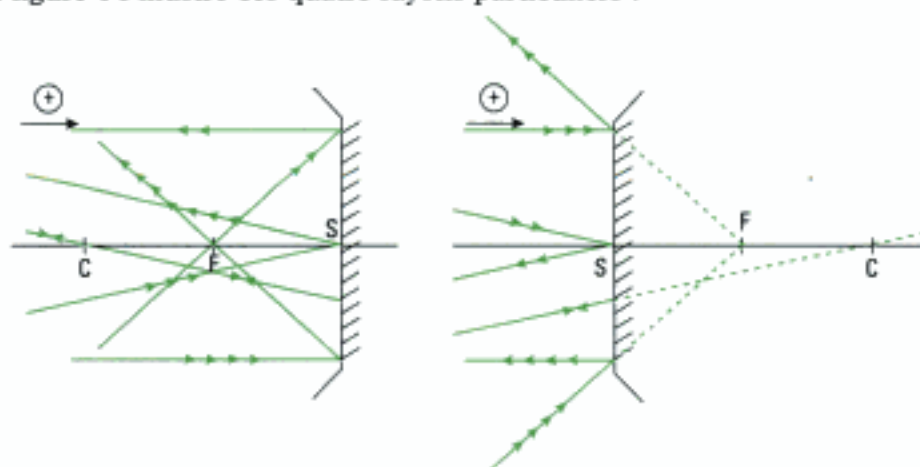


Fig. 14

Rayons incidents particuliers utiles aux constructions géométriques.

Application 1 Cas de miroir concave

Construire le rayon réfléchi correspondant à l'incident ① donné en figure 15.

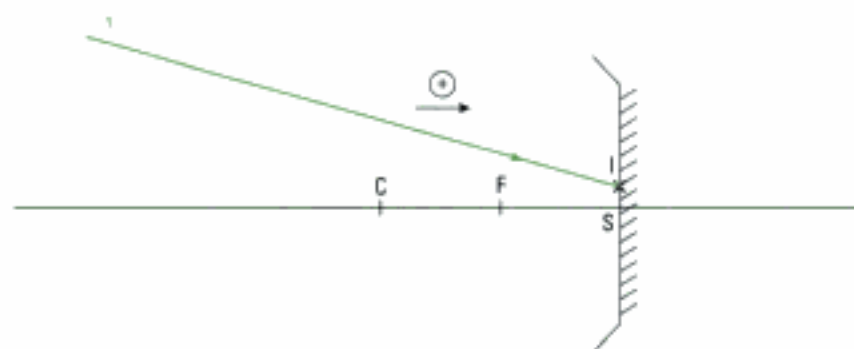


Fig. 15

Solution

1. Nous traçons dans un premier temps un *support* ② en traits mixtes, parallèle au rayon incident et passant par le centre C du miroir sur la figure 16.a.

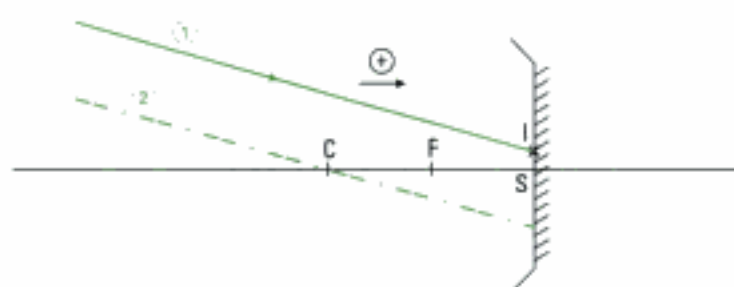


Fig. 16a

2. Ce support passe par un point Φ du plan focal que nous faisons ensuite apparaître sur la figure 16.b.

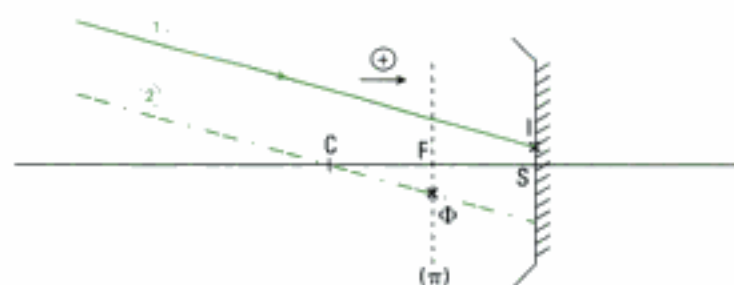


Fig. 16b

3. Si nous imaginons l'existence d'un faisceau incident délimité par ① et ②, la définition 4 nous indique que ce pseudo faisceau doit converger au point Φ du plan focal. Le rayon réfléchi cherché ③ passe donc par I et par Φ comme en figure 16.c.

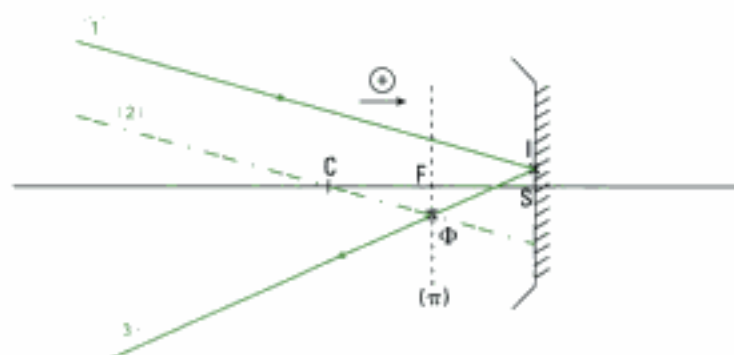


Fig. 16c

Hidden page

Hidden page

Hidden page

La méthode à employer est alors celle qui a été développée pour la construction du rayon réfléchi lorsque le rayon incident est donné (fig. 16). Sur la figure 23, nous déterminons ainsi l'image A' de A situé sur l'axe optique en considérant le rayon incident AI issu de A :

L'image de l'objet AB obtenue par exemple dans la figure 20 aurait pu être obtenue en cherchant les images des points A et B séparément.

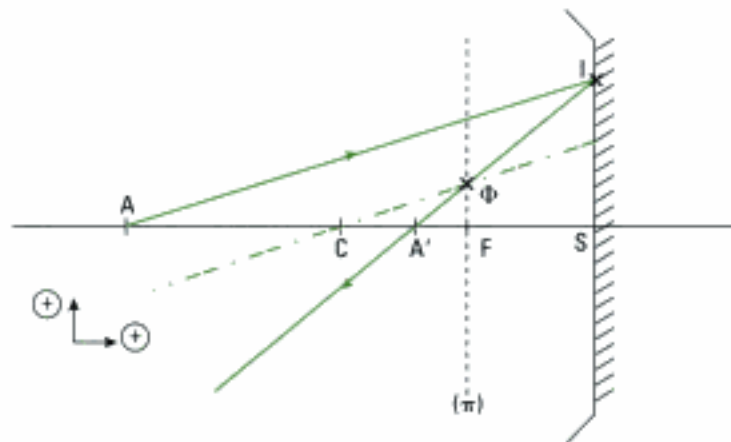


Fig. 23

Construction de l'image A' d'un objet ponctuel A situé sur l'axe optique.

D.Relations de conjugaison du miroir sphérique dans l'approximation de Gauss

Toutes les relations ou formules établies dans ce paragraphe sont indépendantes de la nature concave ou convexe du miroir.

D.1. Relation de conjugaison avec origine au sommet du miroir

Considérons la figure 24 où un rayon incident, émis depuis un point A situé sur l'axe optique du miroir, se réfléchit au point I en accord avec la loi de Snell-Descartes de la réflexion.

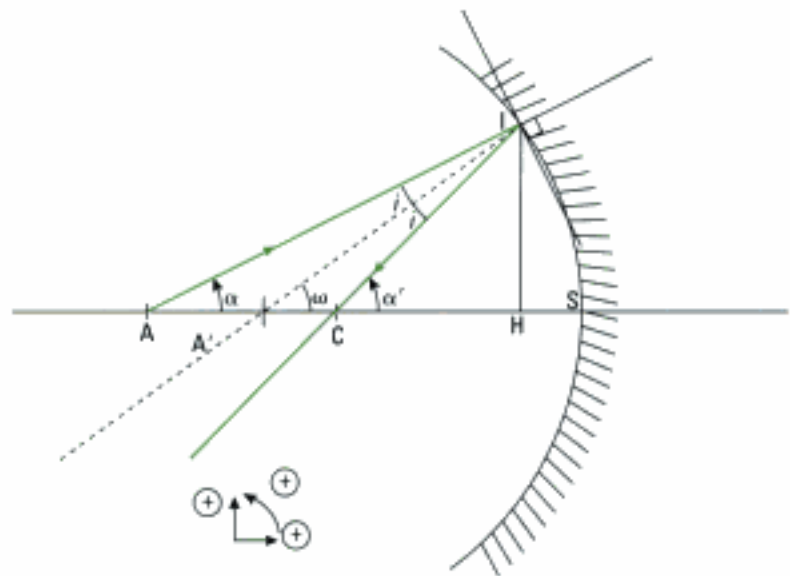


Fig. 24

Sur cette figure, nous n'utilisons pas le symbole du miroir puisqu'en l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

L'image de A étant notée A' et en tenant compte de l'approximation de

Gauss, les angles α , α' et ω peuvent être assimilés à leurs tangentes algébriques selon :

$$\alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} ; \quad \alpha' = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA'}} ; \quad \omega = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HC}}$$

H étant voisin du sommet S, on a : $\overline{HA} = \overline{SA}$, $\overline{HA'} = \overline{SA'}$ et $\overline{HC} = \overline{SC}$ et on peut alors considérer que :

$$\alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA}} ; \quad \alpha' = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA'}} ; \quad \omega = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}}$$

Dans les triangles AIC et A'IC la somme des angles intérieurs doit être égale à π , ce qui conduit à :

$$i + \alpha + \pi - \omega = \pi \quad \text{et donc : } i = \omega - \alpha \quad (1)$$

$$\text{et } i + \omega + \pi - \alpha' = \pi \quad \text{et donc : } i = \alpha' - \omega \quad (2)$$

En utilisant les expressions de α , α' , ω , (1) donne : $i = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}} + \frac{\overline{HI}}{\overline{SA}}$ et

$$(2) \text{ donne : } i = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{HI}}{\overline{SC}}$$

Soit en simplifiant par \overline{HI} ,

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}} \quad (3).$$

(3) est la relation de conjugaison du miroir sphérique (concave ou convexe) avec origine au sommet S du miroir. A' est le conjugué de A par le miroir sphérique.

Définition 8

Le grandissement transversal, noté γ , est défini par le rapport :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

La figure 25 permet de trouver une première expression de ce grandissement utilisant le sommet S du miroir, en considérant le rayon particulier qui passe par S et qui est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique.

Les triangles SA'B' et SAB étant semblables, utilisons le théorème de Thalès :

$$-\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad \text{et } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}, \text{ soit : } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad (4)$$

D.2. Relation de conjugaison avec origine au foyer du miroir

Pour établir cette seconde relation de conjugaison, nous utilisons les deux rayons particuliers mis en évidence sur la figure 26.

En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles semblables FSI et FA'B', il vient :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \quad \text{or } \overline{SI} = \overline{AB} \text{ donc : } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \quad (5)$$

De même dans les triangles semblables FAB et FSJ, on obtient :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \quad (6)$$

Les équations (4) et (5) donnent : $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$

$$\text{D'où : } \overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 = f^2 \quad (7).$$

1. Il est donc nécessaire d'avoir \overline{HI} non nul. Ceci n'est pas étonnant car dans ce cas, $i=0$ et il n'est alors pas possible de déterminer géométriquement l'image de A avec ce seul rayon.

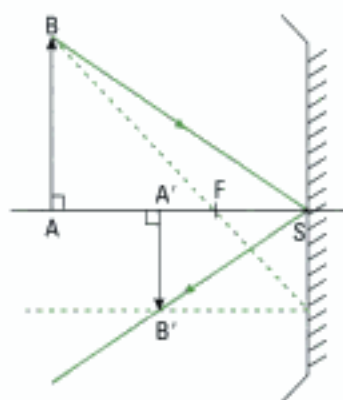


Fig. 25

Le trait pointillé est un rayon particulier qui permet de construire l'image de l'objet AB.

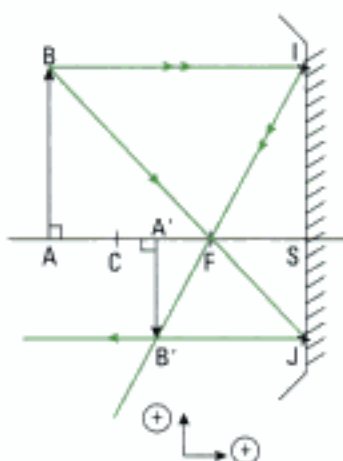


Fig. 26

Construction géométrique utilisée pour établir la relation de conjugaison avec origine au foyer.

Cette relation de conjugaison utilise le foyer du miroir sphérique comme origine alors que la précédente fait usage du sommet. Elle est également appelée **relation de Newton**.

Le grandissement transversal s'obtient alors à partir des relations (5) et (6) :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{FA'}{FS} = \frac{FS}{FA}$$

D.3. Relation de conjugaison avec origine au centre optique du miroir

Nous cherchons à définir ici la position de l'image A' d'un objet A en prenant pour origine le centre C du miroir. Utilisons la relation de Newton associée à la relation de Chasles (les points A, C, F et A' étant alignés) :

$$\overline{FA} = \overline{FC} + \overline{CA} \text{ et } \overline{FA'} = \overline{FC} + \overline{CA'}$$

En reportant dans (7) il vient : $(\overline{FC} + \overline{CA}) \cdot (\overline{FC} + \overline{CA'}) = \overline{SF}^2 = \overline{FC}^2$

En développant le membre de droite de cette équation, et après simplification, il vient : $\overline{FC} \cdot \overline{CA'} + \overline{CA} \cdot \overline{FC} + \overline{CA} \cdot \overline{CA'} = 0$.

En divisant par le produit $\overline{FA} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CA'}$, nous trouvons :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = -\frac{1}{\overline{FC}}, \text{ avec } \overline{FC} = -2\overline{CS}, \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad (8).$$

Le grandissement transversal se déduit immédiatement en appliquant le théorème de Thalès dans les triangles semblables CAB et $CA'B'$ (fig. 20) :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{CA'}{CA}$$

Remarque : lorsque l'objet AB est placé le long de l'axe optique, le grandissement est dit *longitudinal* ou *axial*. Le miroir a alors pour effet de donner une image dilatée ou comprimée de l'objet. Ce grandissement ne peut se définir que localement car il dépend de la position de l'objet sur l'axe optique.

Nous allons terminer ce paragraphe en établissant la relation de conjugaison avec origine au centre, sans tenir compte de l'approximation de Gauss dans le calcul. Ceci permet de mieux concevoir la signification du stigmatisme approché dans le cas du miroir sphérique et aussi celle de l'approximation de Gauss.

Considérons la figure suivante où un miroir sphérique concave donne d'un point objet A une image A' .

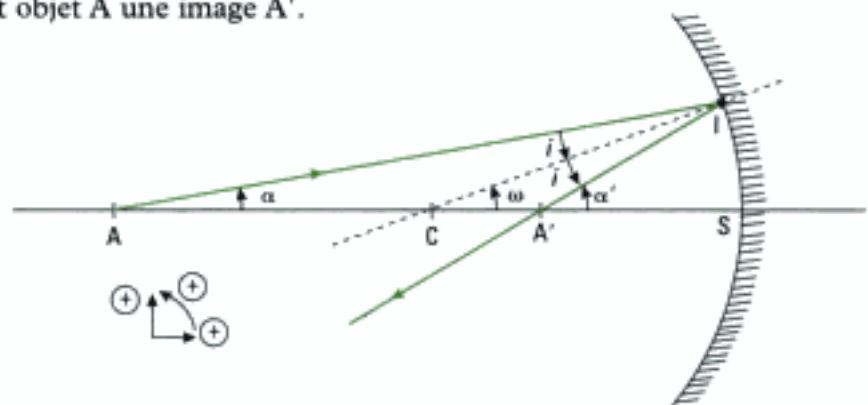


Fig. 27

Figure géométrique utilisée pour exprimer la relation de conjugaison au centre sans tenir compte de l'approximation de Gauss.

L'image A' est nécessairement située sur l'axe optique et sa position a été déterminée en appliquant la loi de la réflexion au point I situé sur le miroir : l'angle \widehat{AIC} est égal à l'angle $\widehat{CIA'}$.

En respectant les orientations des angles et des mesures algébriques, on a :

$$\frac{\sin \alpha}{\overline{CI}} = \frac{\sin i}{\overline{AC}} \text{ dans le triangle } ACI$$

$$\text{et } \frac{\sin(\pi - \alpha')}{\overline{CI}} = \frac{\sin i}{\overline{CA'}} \text{ dans le triangle } A'CI.$$

$$\text{Puisque } \sin(\pi - \alpha') = \sin \alpha' \text{ on obtient : } \frac{\sin \alpha'}{\overline{CI}} = \frac{\sin i}{\overline{CA'}}$$

En isolant $\frac{1}{\overline{CA}}$ et $\frac{1}{\overline{CA'}}$, puis en les additionnant, il vient :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CI}} \cdot \left(\frac{\sin \alpha' - \sin \alpha}{\sin i} \right)$$

Or la somme des angles internes dans les triangles ACI et $A'CI$ valant π radians, on en déduit que : $\alpha = \omega - i$ et $\alpha' = \omega + i$, ce qui conduit à :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2 \cos \omega}{\overline{CI}} \quad (9)$$

$$\text{Comme } \overline{CI} = \overline{CS}, \overline{CS} > 0 \text{ et } \overline{CI} > 0, \text{ on a : } \overline{CS} = \overline{CI} \quad (10)$$

Nous déduisons de (8) et (9) l'égalité :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2 \cos \omega}{\overline{CS}} \quad (11)$$

Cette relation de conjugaison du miroir sphérique (concave ou convexe) avec origine au centre C du miroir, donne la position du conjugué A' d'un point objet A . Elle indique en particulier que la position de A' dépend du rayon incident considéré issu de A puisque ω détermine la valeur de $\overline{CA'}$, les points C , A et S étant fixés par ailleurs. Nous montrons ainsi qu'il n'y a pas de stigmatisme rigoureux dans le cas général.

Toutefois, la relation (11) peut se simplifier lorsque l'approximation de Gauss est légitime ; en effet, si l'angle d'ouverture du faisceau est petit, alors $\cos \omega \approx 1$ à l'ordre 2 en ω et (11) se réécrit alors selon :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

Il s'agit bien de la relation (8) qui a été établie dans le cadre de cette approximation.

E. Cas particulier du miroir plan

Bien que l'ayant déjà étudié dans le chapitre 3, il est intéressant de revenir sur le miroir plan car il est un cas limite du miroir sphérique. En effet, si le rayon du miroir CS tend vers l'infini, sa courbure devient nulle et le miroir sphérique se confond avec le miroir plan.

Cette analyse qualitative permet de retrouver la relation de conjugaison du miroir plan en faisant tendre CS (et donc SF) vers l'infini dans la relation de conjugaison (3) :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = 0 \quad \text{d'où : } \overline{SA'} = -\overline{SA}$$

1. Le terme $\cos \omega$ est lié au phénomène d'aberration géométrique.

L'image A' d'un objet ponctuel A est symétrique de celui-ci par rapport au plan du miroir.

La relation (4) du grandissement donne $\gamma = 1$. L'image est droite et de même taille que l'objet.

F. Champ d'un miroir

Définition 9

Le champ d'un miroir est la portion de l'espace qui est visible dans le miroir.

Ce champ dépend de la position de l'œil de l'observateur comme l'expérience quotidienne le montre. En notant O le point objet où est placé l'œil supposé ponctuel, l'image de celui-ci à travers le miroir (M) est notée O' .

Propriété 3

Le champ du miroir est la portion de l'espace objet délimitée par le cône de sommet O' s'appuyant sur les bords du miroir.

La figure 28 nous donne quelques exemples de champ. Il faut commencer par construire l'image O' de O . Le champ est ensuite obtenu en appliquant la propriété 3.

Ici, l'image O' de O est obtenue par la construction d'un objet transverse, passant par O , pour les miroirs concave et convexe.

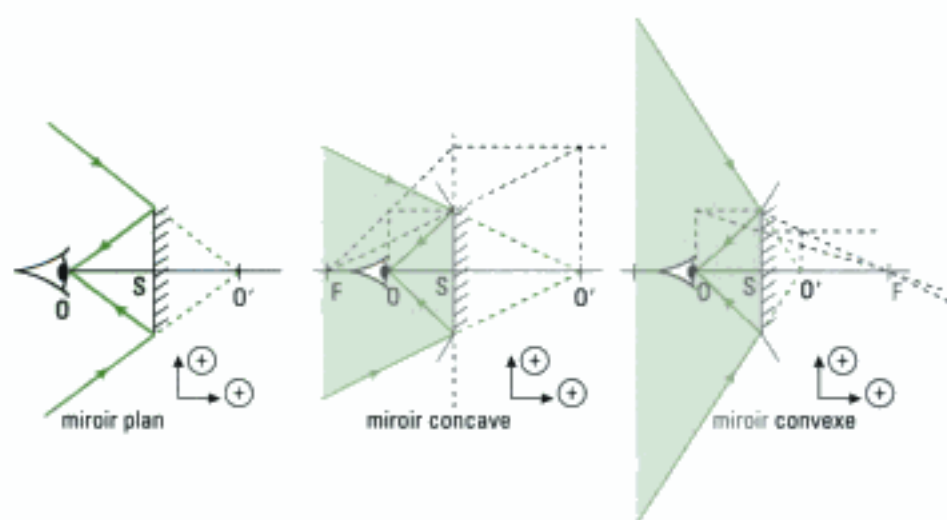


Fig. 28
Exemples de champ de miroirs.

L'essentiel

✓ Définitions générales

- Axe optique, centre optique, sommet, foyer, plan focal, distance focale.
- Vergence d'un miroir sphérique :

$$V = \frac{1}{f}$$

avec $f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$ la distance focale **algébrique** (m) et V la vergence (δ).

✓ Relations de conjugaison et de grandissement

- Origine au sommet du miroir :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}}$$
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

- Origine au foyer du miroir :

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{SF}^2 = f^2$$
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = - \frac{f}{\overline{FA}} = - \frac{\overline{FA'}}{f}$$

- Origine au centre optique du miroir :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

✓ Savoir-faire

- Construire géométriquement le trajet d'un rayon lumineux quelconque incident ou réfléchi.
- Construire géométriquement l'image d'un objet à travers un ou plusieurs miroirs.
- Établir les formules de conjugaison et de grandissement.
- Déterminer par le calcul la position d'un objet, d'une image.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment construire géométriquement l'image d'un objet ?

→ Problème à résoudre

On souhaite trouver l'image d'un objet connu à l'aide d'une construction géométrique.

→ Savoir-faire

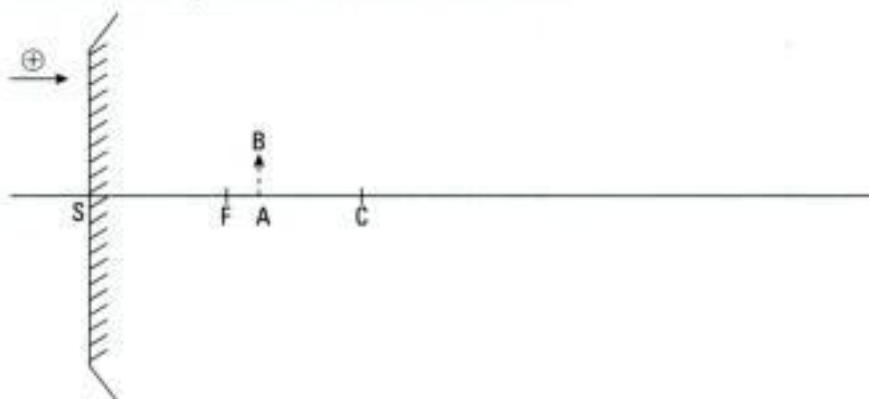
- 1 Identifier la nature du miroir (concave ou convexe) pour placer correctement le foyer, le centre et ensuite l'objet.
- 2 Utiliser deux rayons particuliers issus de l'objet en privilégiant celui qui passe par le centre optique et qui revient sur lui-même après réflexion. Vérifier la construction par un troisième rayon particulier.

→ Application

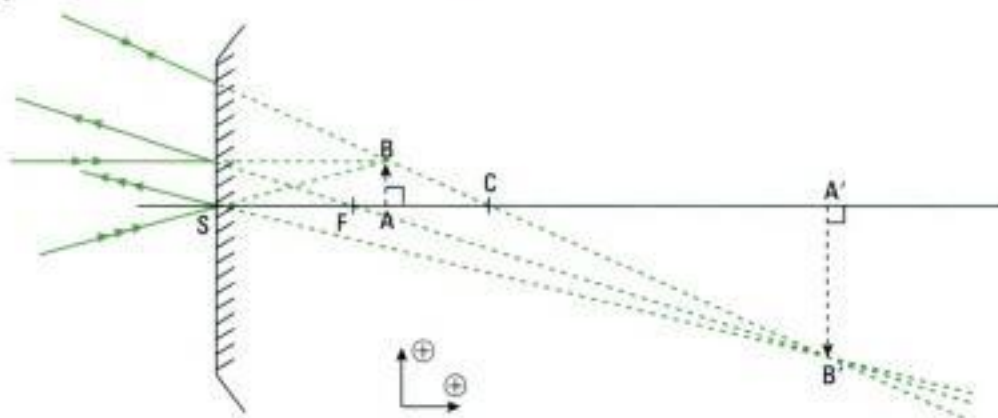
Construire l'image $A'B'$ d'un objet AB , perpendiculaire à l'axe optique et situé entre le foyer et le centre d'un miroir convexe.

Solution

- 1 On place correctement l'objet AB et le miroir convexe :



- 2 On trace en priorité le rayon qui passe par C et revient sur lui-même puis deux autres rayons particuliers (ici le rayon de direction SB ainsi que le rayon incident parallèle à l'axe optique et passant par B) :



L'objet et l'image sont ici virtuels.

Méthode n°2

Comment construire géométriquement le rayon réfléchi associé à un incident donné ?

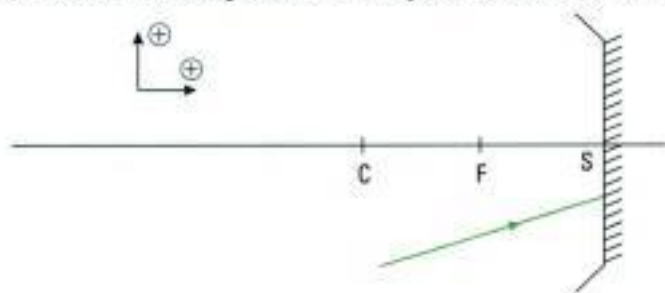
Connaissant le rayon incident sur un miroir sphérique, on souhaite tracer le rayon réfléchi.

→ Savoir-faire

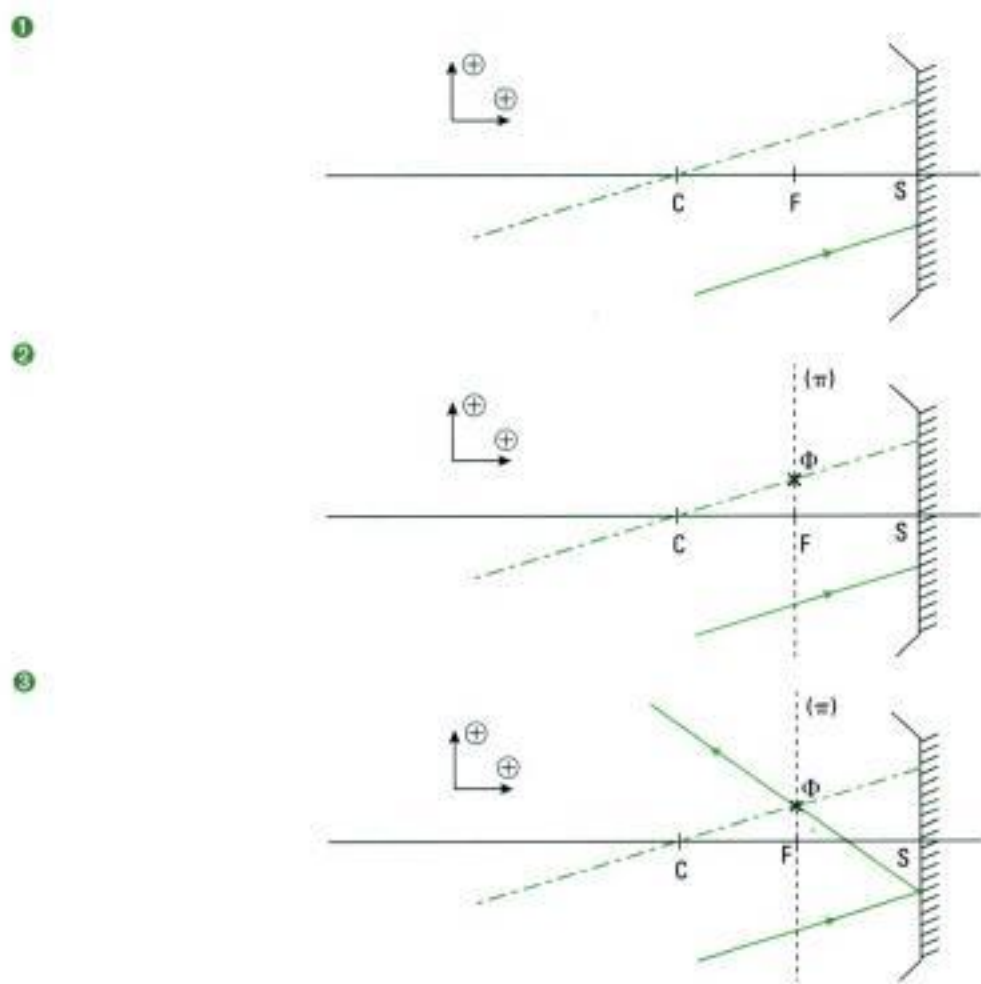
- 1 Tracer le support d'un rayon qui revient sur lui-même après réflexion, donc passant par le centre du miroir et parallèle au rayon incident connu.
- 2 Placer le point Φ intersection de ce support et du plan focal (π).
- 3 Tracer le rayon réfléchi qui passe par Φ (en effet, le support et le rayon incident forment un pseudo-faisceau incliné sur l'axe qui converge en Φ).

→ Application

Déterminer le rayon réfléchi correspondant au rayon incident sur le miroir représenté ci-dessous :



Solution



Méthode n°3

Comment étudier une association de plusieurs miroirs sphériques de même axe optique ?

On étudie une succession de plusieurs miroirs sphériques, de même axe optique, avec une finalité qui peut être très variée et dépend de l'exercice : construction de l'image définitive, calcul de sa position ou de sa taille, détermination d'un champ angulaire.

→ Savoir-faire

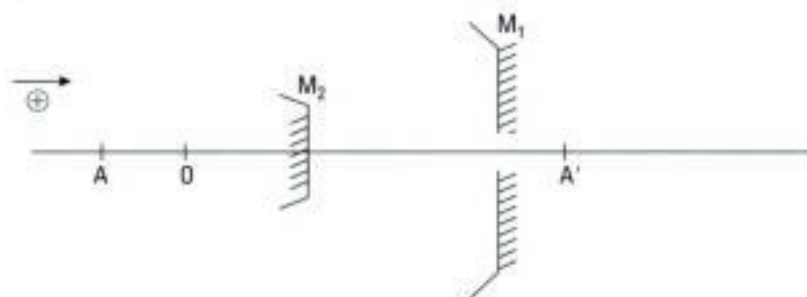
- 1 Décomposer le système étudié en sous-systèmes simples et nommer clairement la succession des images formées :

$$M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n \dots M_n \\ A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \dots A_{n-1} \rightarrow A_n$$

- 2 Si les données de l'exercice le permettent, effectuer ensuite une construction géométrique aérée en étant très vigilant car des erreurs importantes sont souvent commises lors de cette étape : erreur de lecture, de compréhension, de report.
- 3 Écrire les équations algébriques de conjugaison et, ou de grandissement pour les miroirs. Le choix de l'origine de la relation de conjugaison est guidé par l'énoncé de l'exercice.
- 4 Éliminer par étapes successives toutes les données se rapportant aux images intermédiaires.
- 5 Extraire le résultat cherché et terminer par la construction géométrique au besoin.

→ Application

On considère l'association de deux miroirs sphériques M_1 et M_2 , de même axe optique et dont les centres sont confondus au point O . Le miroir M_1 , concave de rayon R_1 , est percé d'une ouverture centrée sur l'axe optique qui laisse passer la lumière issue du point A qui se réfléchit sur M_1 puis sur M_2 , convexe de rayon R_2 (ceci suppose que M_2 est de diamètre suffisamment petit afin que A éclaire M_1).



L'image définitive de A est notée A' . Déterminer la relation entre \overline{OA} et $\overline{OA'}$.

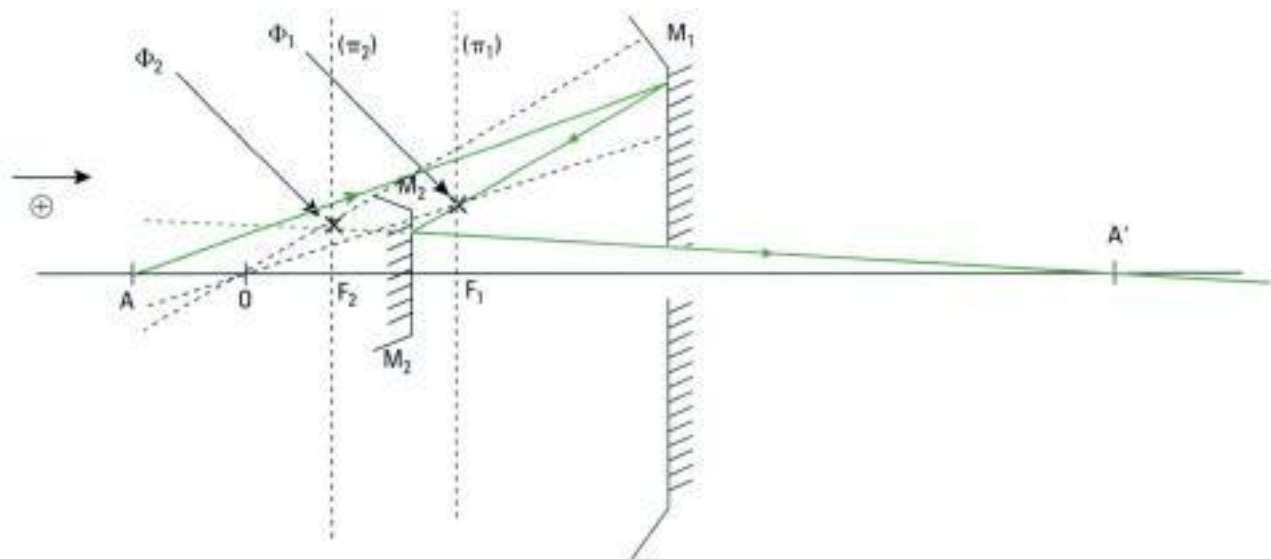
Solution

- 1

$$M_1 \quad M_2 \\ A \rightarrow A_1 \rightarrow A'$$

Le point objet A , situé à distance finie, donne une image intermédiaire A_1 .

- 2 La construction géométrique est ici possible. Sur la figure ci-dessous on a utilisé la définition 5 pour les deux miroirs :



③ Il faut dans cette application déterminer une relation de conjugaison liant la position de A et la position de A'. La relation de conjugaison est suggérée par la géométrie du problème : les deux miroirs étant concentriques, nous prendrons l'origine du centre O :

$$\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA} = \frac{2}{R_1} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA_1} = \frac{2}{R_2} \quad (2)$$

④ et ⑤ Pour éliminer l'image intermédiaire A₁, on soustrait (1) à (2) et on obtient la relation cherchée entre OA et OA' :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{2}{R_2} - \frac{2}{R_1} = 2 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

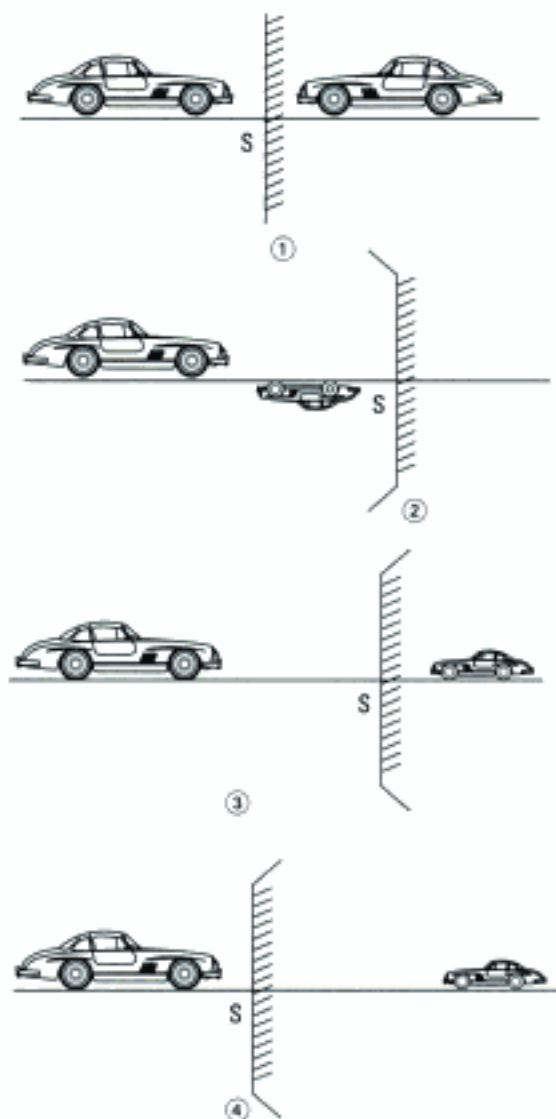
Hidden page

La lune est située à 380 000 km de la Terre et son rayon mesure 3 500 km.

- Calculer la distance focale du miroir sphérique en question.
- Quelle est la position de l'image de la lune ?
- Quel est le grandissement de cette image ? Calculer la taille de l'image.
- Quelles seraient les réponses aux questions précédentes si la surface des océans était plane ?

Ex. 6 Rétroviseur extérieur de voiture

Indiquer quelle(s) situation(s) illustrée(s) dessous correspond(ent) à une observation faite à l'aide d'un rétroviseur extérieur de voiture.



Ex. 7 Rétroviseur convexe

Un rétroviseur est assimilable à un miroir sphérique convexe de vergence $V = 2\delta$.

- Déterminer la position de l'image d'un objet situé à 20 m et le grandissement transversal associé.
- Le rétroviseur est observé par l'œil d'un conducteur situé à 100 cm, diaphragmé par un cercle de

rayon $r = 6,0$ cm. Calculer le rayon R de la zone visible à 20 m du rétroviseur.

Oral, Mines sup 2002

Ex. 8 Et si le miroir du rétroviseur précédent était plan ?

Reprendre les questions de l'exercice précédent dans le cas où le miroir est plan. Conclure.

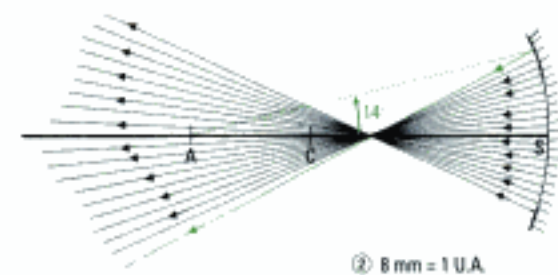
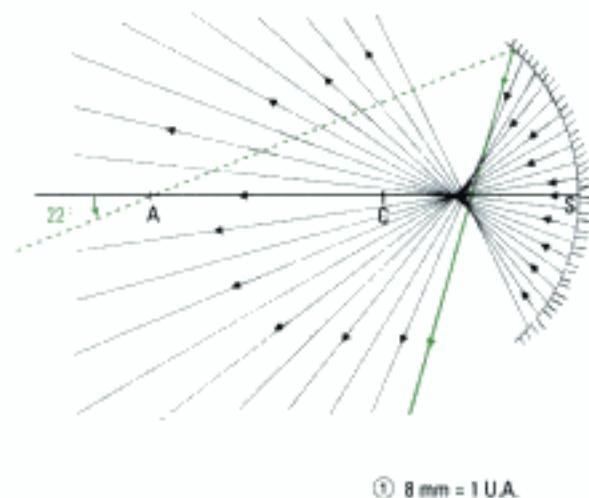
Ex. 9 Avec le creux et le dos de la petite cuillère...

- À quelle distance dois-je placer mon œil du creux d'une petite cuillère, de rayon de courbure égale à 5 cm, pour voir mon œil renversé et réduit de moitié ?
- En retournant la petite cuillère, son dos éloigné de mon œil de la distance précédemment calculée, quel sera le grandissement de la nouvelle image observable ?

Niveau 2

Ex. 10 Stigmatisme et aplanétisme d'un miroir sphérique concave

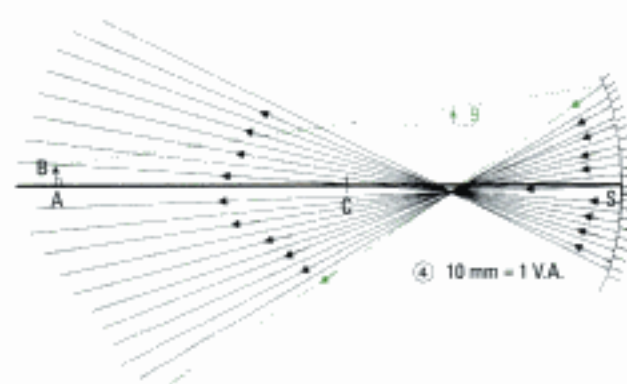
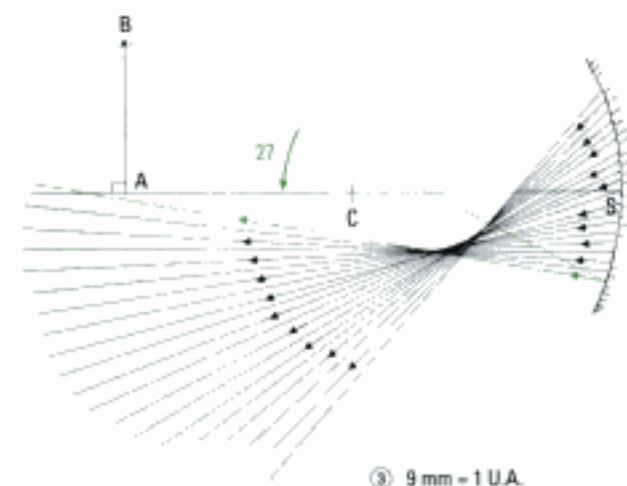
- On propose une première série de simulations illustrée par les figures suivantes



(seuls les rayons réfléchis issus de A sont représentés)

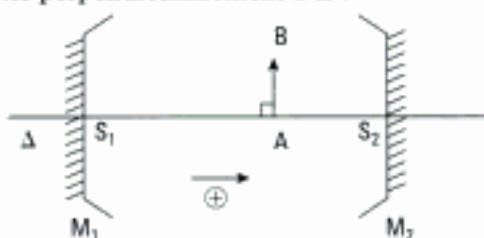
L'objet A ponctuel est situé sur l'axe optique du miroir. Commenter les résultats de ces deux simulations.

b) On envisage deux nouvelles simulations en conservant l'ouverture du miroir du cas de la figure ②. Commenter les résultats obtenus avec ces deux nouvelles simulations (seuls les rayons réfléchis issus de B sont représentés).



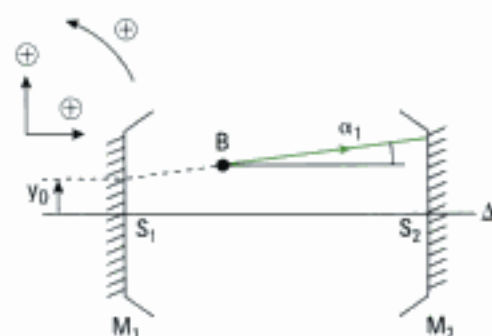
Ex. 11 Cavité confocale

Une cavité confocale est constituée de deux miroirs identiques concaves M_1 et M_2 face à face, de même rayon R , de même axe optique Δ et dont les foyers sont confondus. On place un objet AB à l'intérieur de la cavité perpendiculairement à Δ :



a) Construire géométriquement les quatre images successives obtenues, la première réflexion ayant lieu sur M_2 . Le résultat dépend-il de la position de l'objet AB ?

b) On considère un rayon lumineux incliné d'un angle α_1 sur l'axe optique, émis d'un point B distant de y_0 de l'axe optique :



Exprimer en fonction de α_1 , y_0 et R dans les conditions de Gauss, les angles α_2 , α_3 , α_4 que font les rayons réfléchis avec Δ à l'issue respectivement de la 1^{re}, 2^e puis 3^e réflexion.

c) Conclure quant à la localisation du rayon à l'intérieur de la cavité optique.

Ex. 12 Objet étendu le long de l'axe optique

Une aiguille AB de longueur 4 cm, de section négligeable, est placée le long de l'axe optique d'un miroir sphérique, de rayon de courbure égal à 1 m.

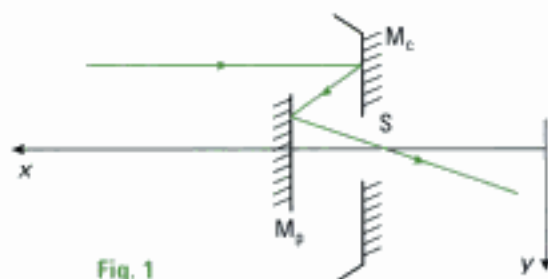
a) Déterminer la longueur de l'image $A'B'$ de l'aiguille en fonction du grandissement transversal γ au point A .

b) On définit le grandissement axial (ou longitudinal) par $\gamma_a = \frac{A'B'}{AB}$.

Peut-on avoir $\gamma_a = 1$?

Ex. 13 Télescope Hipparcos

On propose de modéliser le télescope d'Hipparcos par un miroir concave M_C de rayon $R = 2\,800$ mm avec un miroir plan de renvoi (voir figure 1). On note S le sommet du miroir concave. La lumière subit deux réflexions et passe par un orifice dans le miroir concave pour atteindre le détecteur. Celui-ci est constitué d'une grille et de cellules CCD permettant de repérer la position de l'image. La grille comporte $N = 2\,688$ fentes équidistantes de $\ell = 8,2$ μm .



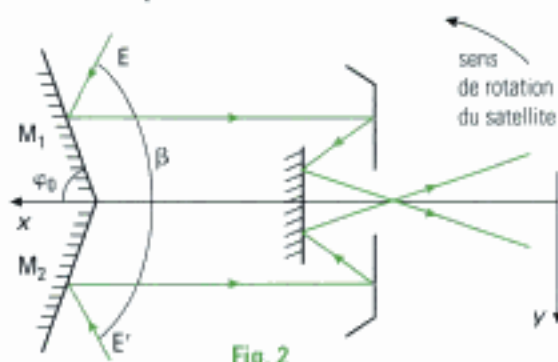
On considère une étoile visée dans la direction Sx . L'axe Sx est orienté vers l'étoile.

a) Déterminer l'abscisse x de l'image E_1 de l'étoile E donnée par le miroir M_C .

b) On note a la distance séparant le miroir plan et le sommet du miroir concave. Déterminer une condition sur a pour que l'image finale E_2 se forme sur le détecteur placé à l'arrière du miroir concave.

c) Déterminer la largeur angulaire α_c du champ observé. Calculer α_c en degré.

d) En réalité, Hipparcos réalise une mesure de position relative des étoiles. Le télescope vise deux directions symétriques par rapport à S_x présentant un angle $\beta = 58^\circ$. C'est un système de deux miroirs plans M_1, M_2 qui permet d'obtenir les images des deux étoiles sur le détecteur (voir figure 2). Le télescope tourne autour d'un axe de direction fixe S_z . Déterminer l'angle φ_0 des miroirs M_1 et M_2 avec l'axe S_x du télescope.



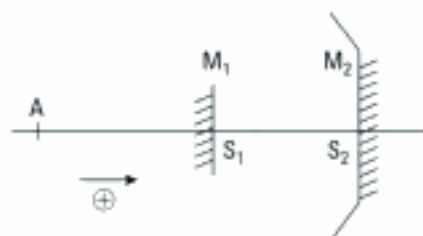
e) Déterminer le déplacement angulaire θ_1 , d'un rayon lumineux réfléchi par le miroir M_1 lorsque le satellite tourne d'un angle θ . Préciser le sens de déplacement des rayons réfléchis par M_1 et M_2 .

D'après écrit Mines sup 2000 filière PC/STI option PC

Niveau 3

Ex. 14 Association de miroirs

On considère l'association d'un miroir plan M_1 et d'un miroir concave M_2 , de rayon R , et de même axe optique que M_1 . On place un objet ponctuel A sur l'axe et toujours à gauche de M_1 (il ne peut pas non plus être collé en M_1 , c'est-à-dire confondu avec S_1).



a) En posant $x = \overline{S_2A}$, $y = \overline{S_2S_1}$, déterminer **analytiquement** le lieu $y = f(x)$ pour lequel A est confondu avec son image donnée par l'association des deux miroirs.

b) Interpréter **physiquement** la branche asymptotique du lieu précédemment mis en évidence.

Ex. 15 Aberration de sphéricité et diffraction

On étudie un miroir sphérique de diamètre D , de

rayon R , de distance focale f' , de centre O et de sommet S :



Un rayon lumineux parallèle à OS et à la distance d de l'axe est réfléchi par le miroir. **Les calculs ne doivent pas être effectués dans le cadre de l'approximation de Gauss.**

a) À l'aide d'un schéma, montrer que dans le plan focal du miroir, le rayon réfléchi est à la distance h du foyer avec :

$$\frac{h}{R} = F(\alpha), \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{d}{R}$$

où $F(\alpha)$ est une fonction à déterminer.

b) À quelle condition sur D et λ la tache due à l'aberration est-elle plus petite que celle due à la diffraction ?

On introduira l'angle α_m tel que $\sin \alpha_m = \frac{D}{4f'}$, et on introduira $F(\alpha_m)$ dans la relation.

c) L'objectif d'un petit télescope d'amateur, peu coûteux, est un miroir sphérique supposé parfait, de distance focale $f' = 120$ cm et de diamètre $D = 10$ cm. On admet que la figure de diffraction dans le plan focal peut être schématisée par une tache centrale de rayon $1,22 f' \lambda / D$. Pour la lumière de longueur d'onde $0,55 \mu\text{m}$, comparer sur cet appareil les rayons h_{max} et r_d des taches dues respectivement à l'aberration de sphéricité et à la diffraction. Commenter le résultat.

d) Pour réaliser un miroir de télescope, on choisit en pratique une forme parabolique plutôt que sphérique. Il faut donc tailler le miroir initialement sphérique pour obtenir une forme parabolique et ainsi éliminer une épaisseur de verre excédentaire d'épaisseur ϵ donnée par :

$$\epsilon(d) = R - \sqrt{R^2 - d^2} - \frac{d^2}{2R}$$

En supposant le rapport $\frac{D}{R}$ petit, montrer que si la condition de la question b) est remplie, alors l'épaisseur maximale de verre à éliminer $\epsilon\left(\frac{D}{2}\right)$ vérifie la relation :

$$\epsilon\left(\frac{D}{2}\right) < \frac{1,22\lambda}{16}$$

Commenter ce résultat.

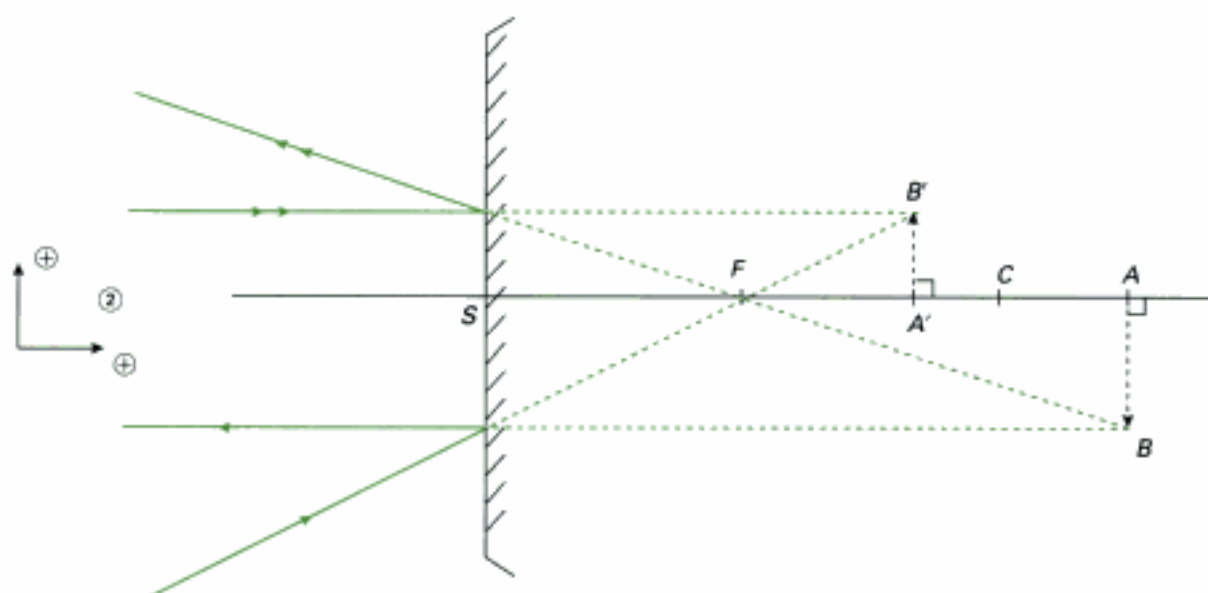
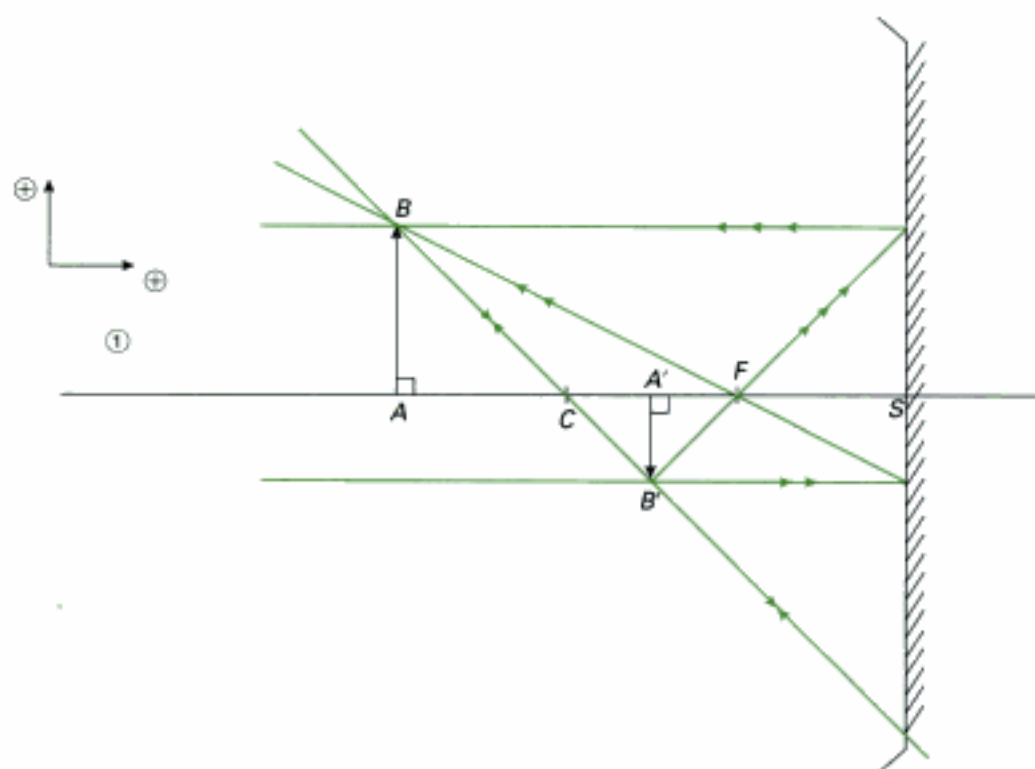
D'après écrit Centrale, Supélec, PSI 2002

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

a) Il suffit d'utiliser le principe de retour inverse de la lumière pour construire l'image AB de l'objet $A'B'$ (méthode 1) :

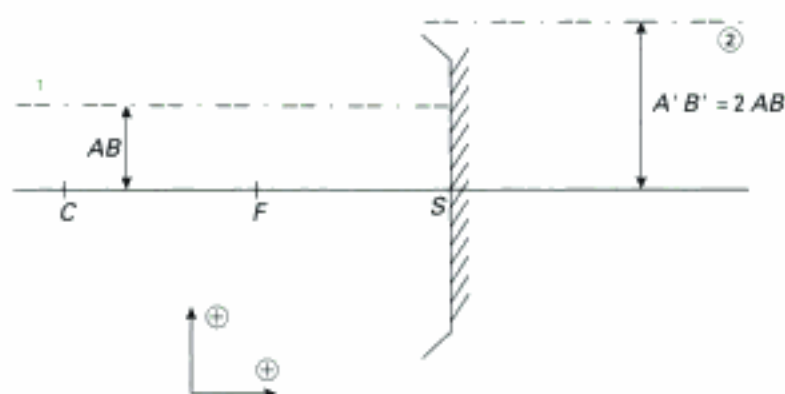


Hidden page

Hidden page

Exercice 3

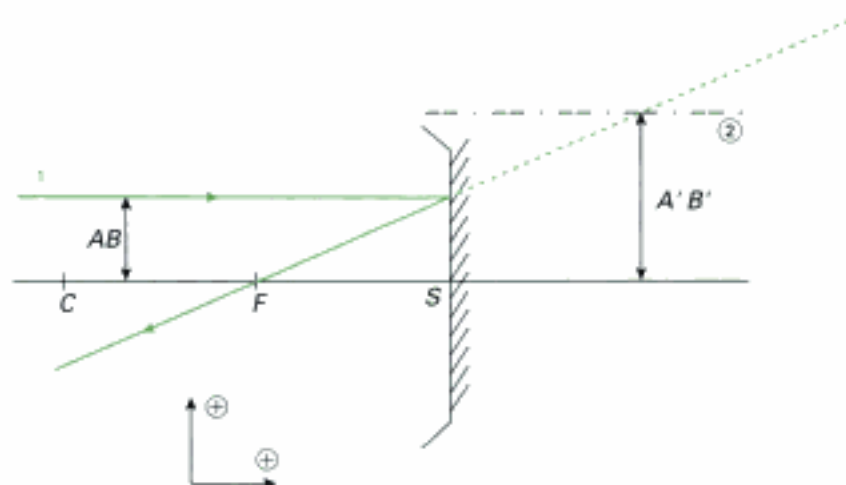
- On commence par choisir arbitrairement une taille pour l'image de l'objet \overline{AB} dont on ne connaît pas la position ; $\gamma = 2$ nous permet de connaître la taille de l'image $A'B'$:



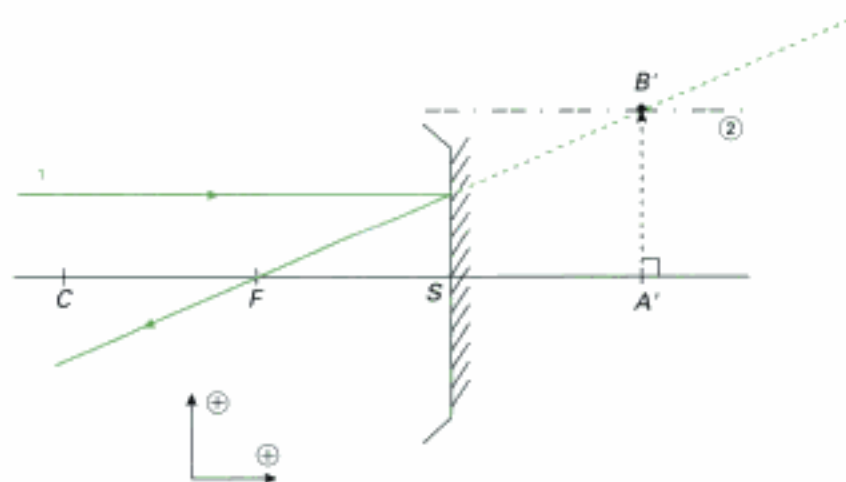
Remarques :

- $A'B'$ est de même signe que AB (image droite)
- A est forcément à droite de F (voir exemples de la figure 21)

- On choisit ensuite un rayon incident dirigé selon le support ① et qui se réfléchit en passant par F :

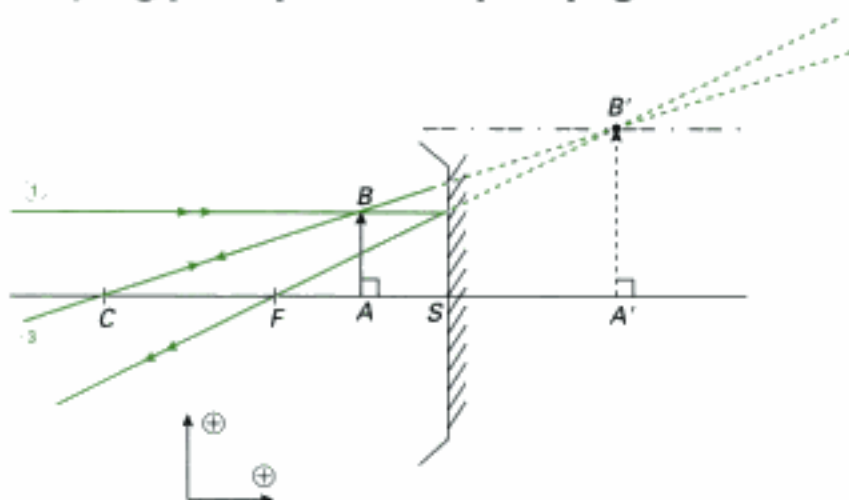


- L'intersection du support du rayon réfléchi et du support ② donne le point B' . A' se déduit par projection orthogonale de B' sur l'axe optique :



$A'B'$ est une image virtuelle.

- On termine la construction en choisissant tout d'abord une position (arbitraire) pour le point B sur ①.
- On trace ensuite le rayon ③ passant par C et B' et qui coupe ① en B :



On déduit par projection orthogonale sur l'axe optique de B et B' respectivement A et A'.

- Vérification du résultat par les formules de conjugaison :

Avec origine au centre : $\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} \Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{2 \times \overline{CA} \cdot \overline{CA'}}{\overline{CA'} + \overline{CA}}$ (1)

Sur la figure ci-dessus, on mesure à la règle $\overline{CA} = 3,0 \text{ cm}$; $\overline{CA'} = 6,0 \text{ cm}$ d'où avec (1) : $\overline{CS} = 4,0 \text{ cm}$.

Avec origine au foyer : $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \frac{\overline{CS}^2}{4} \Leftrightarrow \overline{CS} = \sqrt{4 \times \overline{FA} \cdot \overline{FA'}}$ (2)

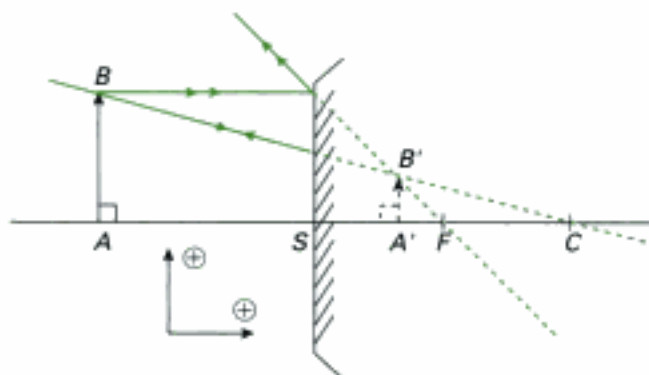
Sur la figure, on mesure à la règle $\overline{FA} = 1,0 \text{ cm}$

$\overline{FA'} = 4,0 \text{ cm}$ d'où avec (2) : $\overline{CS} = 4,0 \text{ cm}$

Ces deux résultats numériques sont bien en accord avec la valeur $\overline{CS} = 4,0 \text{ cm}$ mesurée à la règle sur la figure.

Remarque : la relation avec origine au sommet conduit au même résultat.

Exercice 4



Sachant que l'objet est réel et que le miroir sphérique est convexe, l'image A'B' de l'objet AB est nécessairement virtuelle comme le montre la figure ci-dessus (méthode 1).

- Relation de conjugaison avec origine au sommet S :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{SA'} = \frac{\overline{SA} \cdot \overline{SC}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}}$$

A.N. : $\overline{SA} = -7,0 \text{ cm}$; $\overline{SC} = +10 \text{ cm} \Rightarrow \overline{SA'} = 2,9 \text{ cm}$

$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ A.N. : $\gamma = 0,4$ (l'image est droite)

- Relation de conjugaison avec origine au centre C :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} \text{ donne } \boxed{\overline{CA'} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CS}}{2\overline{CA} - \overline{CS}}}$$

$$A.N. : \overline{CS} = -10 \text{ cm} ; \overline{CA} = \overline{CA} + \overline{SA} = -10 - 7,0 = -17 \text{ cm} \Rightarrow \overline{CA'} = -7,1 \text{ cm}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}} \quad A.N. : \gamma = 0,4$$

- Relation de conjugaison avec origine au foyer F :

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = f^2 = \frac{\overline{SC}^2}{4} \Leftrightarrow \overline{FA'} = \frac{\overline{SC}^2}{4 \cdot \overline{FA}}$$

$$\text{avec } \overline{FA} = \overline{FS} + \overline{SA} \text{ donc : } \boxed{\overline{FA'} = \frac{\overline{SC}^2}{4 \cdot (\overline{FS} + \overline{SA})}}$$

$$A.N. : \overline{FS} = \frac{\overline{CS}}{2} = -5,0 \text{ cm} \Rightarrow \overline{FA'} = -2,1 \text{ cm.}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}} \quad A.N. : \gamma = 0,4$$



Commentaire : la première méthode est la plus rapide car l'énoncé de cet exercice prend implicitement le sommet pour origine.

Exercice 5

$$a) \boxed{\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2}} \quad A.N. : f = \overline{SF} = 3 \text{ 200 km}$$

$$b) \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{SA'} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}} \quad A.N. : \overline{SA'} = 3 \text{ 173,3 km}$$

$$c) \boxed{\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}} \quad A.N. : \gamma = 8,35 \cdot 10^{-3}$$

On en déduit la taille A'B' du rayon de l'image puis celle de l'image de la lune : $\boxed{A'B' = \gamma \cdot AB}$

A'B' = 29,2 km, soit une image de taille 58,4 km.

- d) Dans l'hypothèse où la surface de la mer est plane, on a :

$\overline{SA'} = -\overline{SA} = 380 \text{ 000 km}$; $\gamma = 1$; A'B' = AB = 3 500 km, soit une image de taille égale à 7 000 km.

Exercice 6

② est à éliminer d'office car l'image donnée par le rétroviseur doit être droite (l'image pourrait être droite à condition que l'objet soit placé entre le foyer et le sommet du miroir ce qui en pratique n'est pas souhaitable pour cette application).

① L'image est droite, ceci étant, l'expérience au quotidien montre que l'image donnée par un rétroviseur extérieur de voiture est plus petite que l'objet (car on souhaite un large champ de vision).

③ et ④ correspondent bien à une image droite et de taille inférieure à celle de l'objet. Reste à savoir si l'image A' est plus proche du miroir que ne l'est l'objet A (cas ③) ou plus éloigné (④). Introduisons SA et SA' respectivement la distance sur l'axe optique, de A et A' au sommet S :

$$\overline{SA'} = SA' > 0 ; \overline{SA} = -SA < 0 ; \overline{SC} = R > 0 \text{ avec : } \frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{SA'} = \frac{2}{R} + \left(\frac{1}{SA}\right) > \frac{1}{SA} \Leftrightarrow SA' < SA$$

L'image doit donc être plus proche du miroir que ne l'est l'objet.

Conclusion : ③ correspond à une observation faite à l'aide d'un rétroviseur extérieur de voiture.

Exercice 7

- Position de l'image :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC} \Leftrightarrow \boxed{\overline{SA'} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}}$$

$$\text{A.N. : } \overline{SC} = 2\overline{SF} = \frac{2}{V} = 1 \text{ m ; } \overline{SA} = -20 \text{ m} \Rightarrow \overline{SA'} \approx \mathbf{0,49 \text{ m}}$$



Commentaire : l'image se forme quasiment au foyer (l'objet peut être considéré à l'infini).

- Grandissement :

$$\boxed{\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}} \quad \text{A.N. : } \gamma = \mathbf{2,4 \cdot 10^{-2}}$$



Commentaire : l'image est droite et très petite.

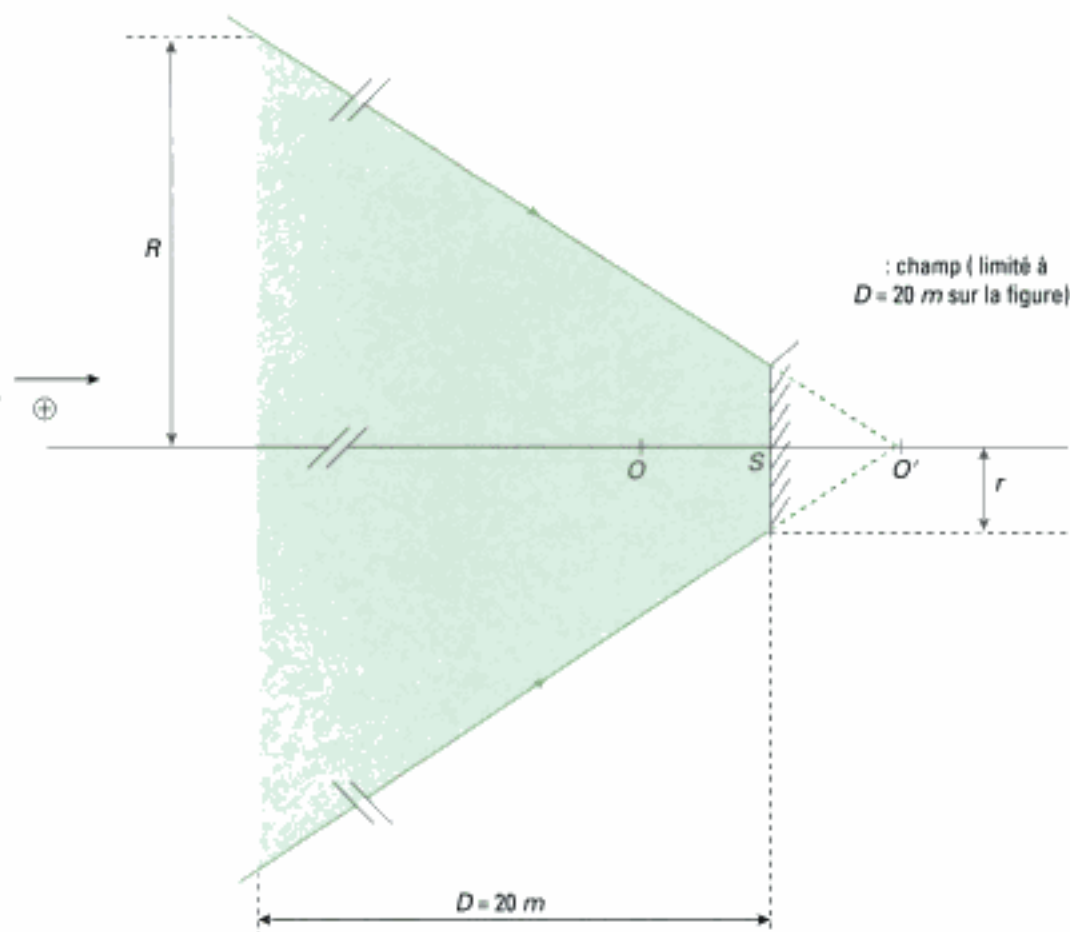
- Rayon R du champ visible à 20 m :

On commence par déterminer la position de l'image O' de l'œil O situé à 1 m du miroir :

$$\frac{1}{SO'} + \frac{1}{SO} = \frac{2}{SC} \Leftrightarrow \boxed{\overline{SO'} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SO}}{2\overline{SO} - \overline{SC}}} \quad \text{A.N. : } \overline{SO'} = \mathbf{0,33 \text{ m.}}$$

Ensuite on réalise la construction géométrique mettant en évidence le rayon R de la zone visible à 20 m :

Hidden page



$$\frac{R}{r} = 1 + \frac{D}{SO'} \Leftrightarrow R = r \cdot \left(1 + \frac{D}{SO'}\right) \quad \text{A.N. : } R = 1,26\text{m.}$$

L'échelle n'est pas respectée pour la distance D.

• Conclusion : Le rayon R du champ est plus faible que celui obtenu dans les mêmes conditions avec un miroir sphérique convexe de même diamètre. Ceci justifie l'emploi de ce dernier pour fabriquer un rétroviseur bien que le grandissement transversal soit plus faible, à situation égale, pour le miroir convexe que pour le miroir plan.

Exercice 9

$$\text{a) } \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC} \quad (1) \text{ avec ici : } -\frac{SA'}{SA} = \gamma = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{SA'} = \frac{SA}{2}$$

$$(1) \text{ se réécrit donc selon : } \frac{2}{SA} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC} \Leftrightarrow \overline{SA} = \frac{3}{2} \overline{SC}$$

A.N. : $\overline{SC} = -5$ cm puisque le « miroir » est concave d'où $\overline{SA} = -7,5$ cm.



Commentaire : L'image est située à 7,5 cm à l'avant de la cuillère.

b) Le dos de la cuillère se comporte comme un miroir convexe, avec :

$$\gamma = -\frac{SA'}{SA} \text{ et } \overline{SA'} = \frac{SA \cdot \overline{SC}}{2SA - SA}$$

$$\text{donc : } \gamma = \frac{-\overline{SC}}{2SA - \overline{SC}} \quad \text{A.N. : } \gamma = 0,25.$$

L'image est dans ce cas droite, virtuelle (car $\overline{SA'} > 0$) et deux fois plus petite que précédemment. On pourra vérifier rapidement ces résultats en utilisant une petite cuillère et en estimant son rayon.

Exercices de niveau 2

Exercice 10

a) Dans la simulation ①, **il n'y a pas stigmatisme pour l'objet A** car son image n'est pas ponctuelle : on visualise ainsi la caustique. Ceci est dû à l'ouverture du faisceau incident issu de A : les rayons incidents marginaux les plus inclinés font un angle voisin de 22° avec l'axe optique. On peut aussi préciser la position qu'aurait l'image A' de A si le stigmatisme était approché.

En utilisant l'échelle d'unité propre, orientée positivement de C vers S, on mesure $\overline{SA} = -6$ unités ; $\overline{SC} = -2,8$ unités, donc $\overline{SA'} = \frac{\overline{SA} \cdot \overline{SC}}{2\overline{SA} - \overline{SC}} = -1,8$ unités.

Cette position correspond au point de rebroussement de la caustique sur l'axe optique.

Dans la simulation ②, l'ouverture du faisceau incident est réduite : les rayons marginaux les plus inclinés font un angle voisin de 14° avec l'axe optique. Les angles sont donc petits (rappel : on est dans les conditions de Gauss lorsque $\alpha < 10^\circ$).

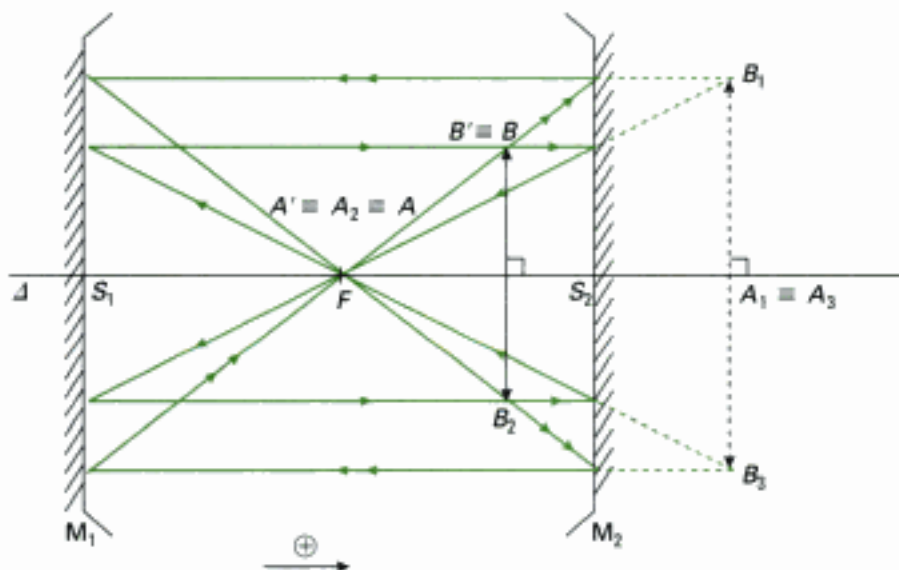
L'image semble ponctuelle dans cette simulation. Les mesures de $\overline{SA} \approx -5,1$ unités et $\overline{SC} = -3,4$ unités permettent de calculer $\overline{SA'} = -2,5$ unités. Cette position est très proche du point de convergence de tous les rayons réfléchis. On peut donc dire qu'il y a **stigmatisme approché pour l'objet A**.

b) En ③, **il n'y a pas stigmatisme pour l'objet AB** (présence d'une caustique : les rayons les plus inclinés font un angle voisin de 27° avec l'axe optique). Il n'y a donc **pas aplanétisme** (qualité de l'image). Il n'y a **pas non plus correspondance plan à plan et la courbure de champ** s'observe très nettement ($\overline{SA} = -6,3$ unités ; $\overline{SC} = -3,5$ unités $\Rightarrow \overline{SA'} = -2,4$ unités).

Enfin en ④ le stigmatisme approché semble satisfaisant. Ceci n'est guère étonnant puisqu'ici les rayons incidents marginaux les plus inclinés font un angle voisin de 9° avec l'axe optique. L'éventuelle courbure de champ est difficile à voir compte tenu de l'échelle de cette simulation. Néanmoins on peut calculer $\overline{SA'}$: on mesure $\overline{SA} = -6,4$ unités ; $\overline{SC} = -3,1$ unités $\Rightarrow \overline{SA'} = -2$ unités. A' est ainsi très proche du point A' situé sur l'axe optique et dans le plan de front du point de convergence des rayons réfléchis. On peut donc raisonnablement admettre **l'aplanétisme et le stigmatisme** approchés pour l'objet AB dans ce cas, les conditions de Gauss étant vérifiées.

Exercice 11

a) Le foyer F de chacun des miroirs est situé à égale distance de S_1 et S_2 . Pour construire les images successives de AB, il est ici intéressant d'utiliser les rayons passant par F avant ou après réflexion :



Ci-dessus, on obtient les images successives selon : $AB \xrightarrow{M_2} A_1B_1 \xrightarrow{M_1} A_2B_2 \xrightarrow{M_2} A_3B_3 \xrightarrow{M_1} A'B'$



Remarque : après deux réflexions, le grandissement transversal γ est égal à -1 et à $+1$ après quatre réflexions successives.

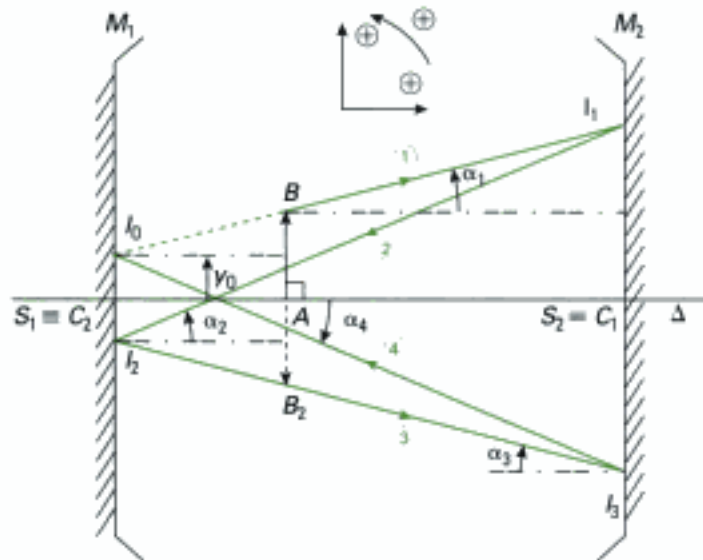
On conclut que l'image A'B' obtenue après quatre réflexions successives sur M_1 et M_2 est confondue avec l'objet AB.

Ce résultat ne dépend pas de la position de l'objet.

b) Construction géométrique des rayons réfléchis : (voir figure suivante)

On commence par déterminer le rayon ② réfléchi par M_2 . Sachant que ② passe par I_1 , il suffit de déterminer un second point géométrique de ② par exemple l'image I_2 de I_0 par M_2 . Or en remarquant que C_2 est confondu avec son image donnée par M_2 , on déduit que I_2 est contenue dans le plan de front de C_2 .

Sachant que $\gamma = -1$ pour deux réflexions successives, on a nécessairement B_2 symétrique de B par rapport à Δ . Ceci n'est possible qu'à la condition où I_2 est lui-même symétrique de I_0 par rapport à Δ :



Le rayon ③ réfléchi par M_1 passe par I_2 et par le symétrique B_2 de B par rapport à Δ ($\gamma = -1$ après deux réflexions successives).

Il passe par I_3 situé sur M_2 et symétrique de I_1 par rapport à Δ . Enfin le rayon ④ réfléchi par M_2 passe par I_3 et par I_0 .

• Détermination des angles α_2 , α_3 et α_4 :

Dans les conditions de Gauss tous les angles sont assimilables à leurs tangentes. On a :

$$\overline{S_2 I_1} = y_0 + R \cdot \alpha_1 \quad \text{et} \quad \overline{S_2 I_1} = R \cdot \alpha_2 - y_0 \quad (\alpha_1, \alpha_2 > 0) \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2y_0}{R}$$

$$\text{De même : } \overline{S_2 I_3} = R \cdot \alpha_3 - y_0 \quad (\text{avec } \alpha_3 < 0) \quad \text{et} \quad \overline{S_2 I_3} = -\overline{S_2 I_1} = -y_0 - R\alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_1$$

$$\text{Enfin : } \overline{S_2 I_3} = R \cdot \alpha_4 + y_0 \quad (\text{avec } \alpha_4 < 0) \Rightarrow \alpha_4 = \alpha_3 - \frac{2y_0}{R} = -\alpha_1 - \frac{2y_0}{R}$$

c) Nous savons que lors des réflexions suivantes le rayon se réfléchira selon ①, ②, ③, ④. Ainsi l'inclinaison des rayons réfléchis successifs est comprise entre $-\alpha_1 - \frac{2y_0}{R}$ et $\alpha_1 + \frac{2y_0}{R}$. En d'autres termes, le rayon lumineux reste confiné dans la cavité. Ceci est caractéristique des cavités lasers (sources laser).

Exercice 12

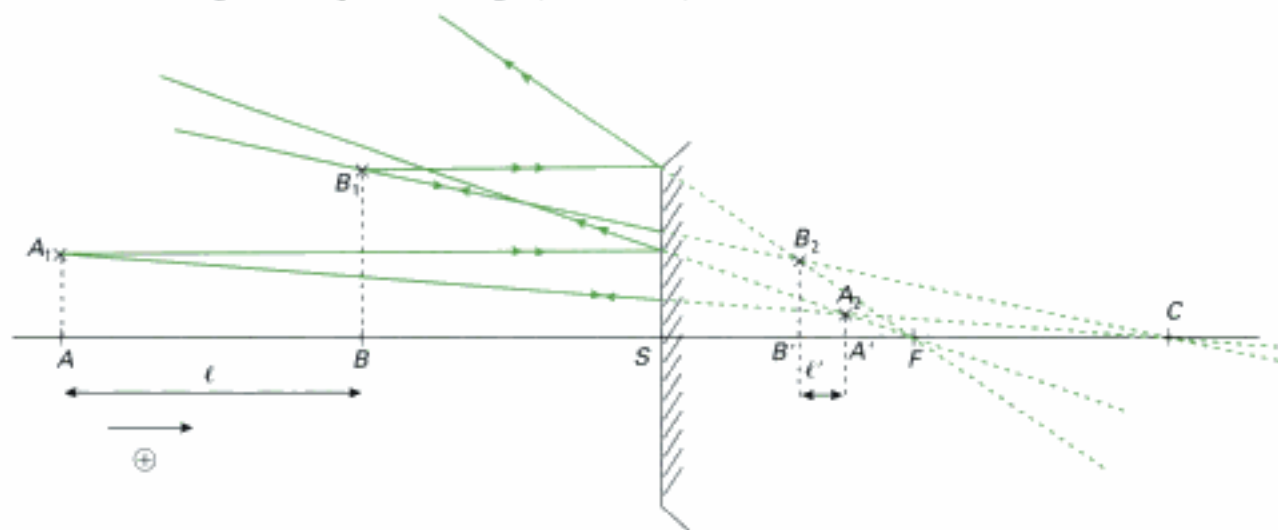
a) Analyse qualitative préalable :

La nature du miroir sphérique (concave ou convexe) n'est pas précisée par l'énoncé. Ceci n'est pas surprenant puisque nous savons que les relations de conjugaison n'en dépendent pas. Choisissons, par exemple, un miroir convexe.

Les données de l'exercice sont $R = \overline{SC}$, $\ell = AB$ et $\ell' = A'B'$.

La relation de conjugaison la mieux adaptée au problème posé est celle avec origine au foyer. En effet, \overline{FA} et $\overline{FA'}$ peuvent s'exprimer en fonction des données γ et f sans qu'il soit besoin de connaître la position de l'objet par rapport à F .

- Construction géométrique de l'image (méthode 1) :



On commence par déterminer les images A_1 de A , et B_1 de B . A_1 est obtenu par projection orthogonale de A , sur l'axe optique, B_1 par projection orthogonale de B , sur l'axe optique.

- Longueur ℓ' de l'image $A'B'$

Précisons tout d'abord la définition du grandissement transversal γ au point A : $\gamma = \frac{\overline{A'A_2}}{\overline{AA_1}}$

Appliquons la relation de Newton pour le point B et son image B' :

$$\overline{FB} \cdot \overline{FB'} = f^2 = \frac{R^2}{4} \quad (R = \overline{SC})$$

$$\Leftrightarrow (\overline{FA} + \overline{AB}) \cdot (\overline{FA'} + \overline{A'B'}) = \frac{R^2}{4} \quad (1)$$

$$\text{avec : } \overline{FA} = -\frac{f}{\gamma} = -\frac{R}{2\gamma} ; \overline{FA'} = -f \cdot \gamma = -\frac{R}{2} \gamma ; \overline{AB} = \ell ; \overline{A'B'} = -\ell'$$

$$(1) \text{ devient : } \left(-\frac{R}{2\gamma} + \ell\right) \cdot \left(-\frac{R}{2} \gamma - \ell'\right) = \frac{R^2}{4}$$

$$\text{Après simplification, on obtient : } \ell' = \ell \cdot \frac{\gamma^2 \cdot R}{R - 2\gamma\ell}$$

$$\text{b) Si on a : } \gamma_a = 1 \text{ avec } \gamma_a = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\ell'}{\ell}, \text{ il vient : } \ell' = -\ell \Rightarrow -\ell = \ell \cdot \frac{\gamma^2 \cdot R}{R - 2\gamma\ell}$$

$$\Leftrightarrow R \cdot \gamma^2 - 2\ell \cdot \gamma + R = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré en γ dont le discriminant réduit Δ' vaut $\ell^2 - R^2$.

$$\text{A.N. : } \Delta' = 4^2 - 100^2 < 0$$

Il n'existe donc pas de valeur réelle pour le grandissement transversal γ au point A par conséquent on ne peut pas avoir $\gamma_a = 1$.

Exercice 13

a) L'objet (l'étoile visée) étant situé à l'infini, son image E_1 donnée par M_C se trouve au foyer F_C de M_C :

$$E_\infty \xrightarrow{M_C} E_1 = F_C$$

donc : $x = \overline{SE_1} = \frac{SC}{2}$ A.N. : $x = 1\,400\text{ mm}$



(x est ici comptée à partir de la position de S le signe étant déterminé par l'orientation de l'axe Sx imposé dans l'énoncé)

b) La condition cherchée provient du fait que le détecteur est placé à l'arrière du miroir concave. Ainsi en notant E_2 l'image de E_1 par M_p , on doit avoir : $\overline{SE_2} > 0$



Le signe de la mesure algébrique est imposé par le sens de propagation de la lumière incidente et non par le repère Sxy .

En notant S_p le sommet de M_p :

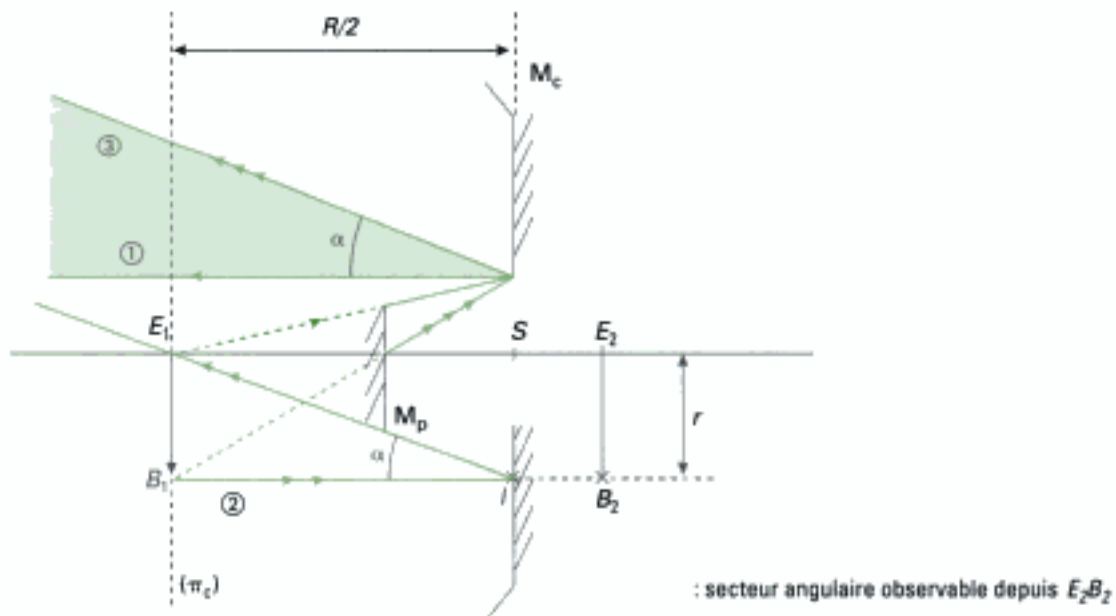
$$\overline{SS_p} + \overline{S_pE_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow -a + (-\overline{S_pE_1}) > 0$$

$$\Leftrightarrow -a + \overline{SS_p} + \overline{E_1S} > 0 \quad \text{avec} \quad \overline{SS_p} = -a ; \overline{E_1S} = x$$

donc : $a < \frac{x}{2} = \frac{R}{4}$ A.N. : $a < 700\text{ mm}$

c) La largeur angulaire α_C du champ observé est imposée par la taille finie du capteur CCD. L'angle α_C peut être mis en évidence en utilisant le principe de retour inverse de la lumière : le champ angulaire est la portion d'espace que voit le capteur au travers de l'instrument.



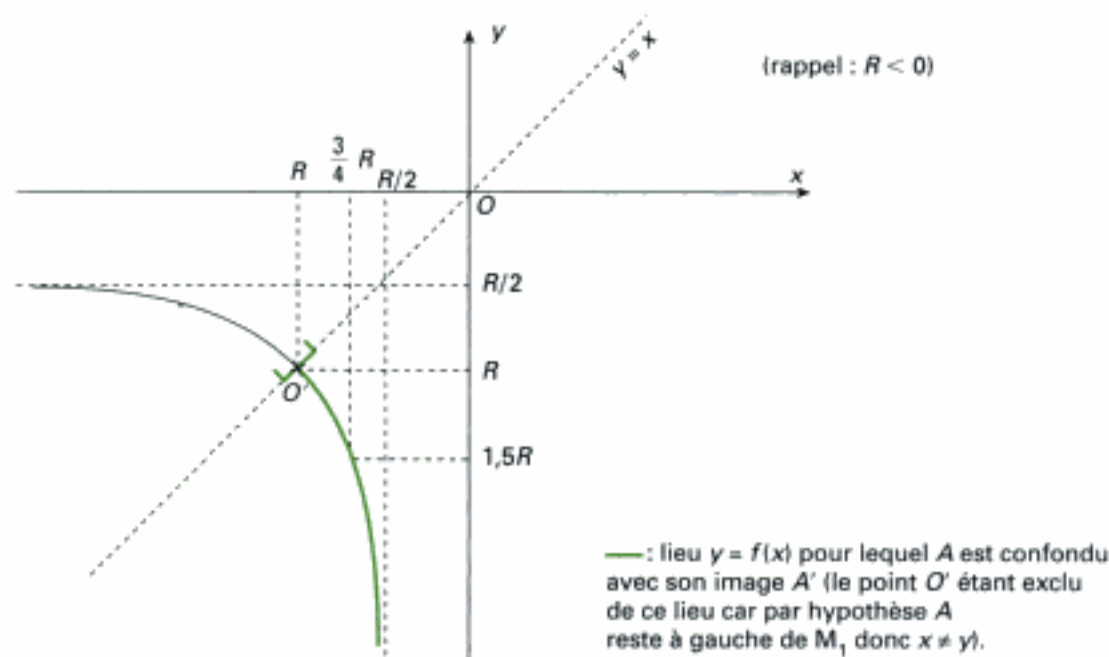
Afin d'alléger la construction graphique sur la figure ci-dessus, on ne s'intéresse qu'au demi-espace observable en ne représentant que la moitié du capteur, notée E_2B_2 (on fait l'hypothèse plausible que le capteur est centré sur l'axe optique). Le bord B_2 du capteur a pour image B_1 par M_p (B_1 est symétrique de B_2 par rapport au plan de M_p). Le centre E_2 a de même pour image E_1 . Reste à déterminer l'image de E_1B_1 par M_C : E_1B_1 étant situé dans le plan focal (π_C) de M_C , son image est rejetée à l'infini. On sait que l'image de E_1 est à l'infini sur l'axe dans la direction du rayon ① issu de E_1 . De même, l'image de B_1 est rejetée à l'infini dans la direction du rayon ②, qui est aussi celle du rayon ③. La zone observable par E_2B_2 possède une largeur angulaire α et est délimitée par les rayons ① et ③.

Hidden page

Il s'agit de l'équation mathématique d'une hyperbole équilatère centrée sur le point $(x = \frac{R}{2}; y = \frac{R}{2})$.

Il reste à déterminer quel domaine de cette courbe est physiquement acceptable.

Ici $x = \overline{S_2A} < 0$; $y = \overline{S_2S_1} < 0$ et $|x| > |y|$ compte tenu de l'énoncé. Seul le lieu mis en évidence ci-dessous est ainsi compatible avec le problème physique posé :

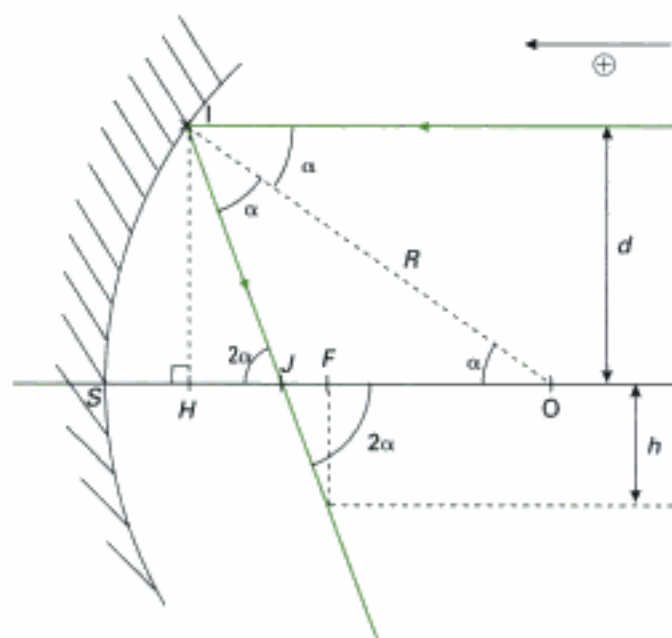


Prenons un exemple pour lequel A est confondu avec son image : pour $x = \frac{3}{4}R$, on lit $y = 1,5R$.

b) La branche infinie du lieu $y = f(x)$ précédemment mis en évidence peut s'interpréter comme suit : si A est situé au foyer objet de M_2 (alors $x = \frac{R}{2}$) son image A_1 est rejetée à l'infini ; la seule possibilité alors pour que A_1 soit invariant par M_1 est que le miroir plan soit rejeté à l'infini, à gauche de M_2 et dans ce cas l'image définitive A' se situera en F_2 ce qui donne $A = A' = F_2$. Mathématiquement, on a donc bien : $\lim_{x \rightarrow \frac{R}{2}} y(x) = -\infty$.

Exercice 15

a) En utilisant la loi de Descartes de la réflexion au point d'incidence I, la construction géométrique ci-dessous permet d'obtenir $F(\alpha)$:



avec : $h = JF \cdot \tan 2\alpha$ (1)

où : $JF = HO - HJ - FO = R \cos \alpha - HI \cdot \cotan 2\alpha - \frac{R}{2}$

avec $HI = d$, donc : $JF = R \cdot \left(\cos \alpha - \frac{d}{R} \cdot \cotan 2\alpha - \frac{1}{2} \right)$ (2)

(1) et (2) donnent donc :

$$\frac{h}{R} = \tan 2\alpha \cdot \left(\cos \alpha - \frac{d}{R} \cdot \cotan 2\alpha - \frac{1}{2} \right)$$

En utilisant $\sin \alpha = \frac{d}{R}$, on a :

$$F(\alpha) = \tan 2\alpha \cdot \left(\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} - \frac{1}{2} \right)$$

Après simplification, il vient :

$$F(\alpha) = \frac{\tan 2\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \quad (3)$$

Test : si d est petite, α tend vers zéro : le rayon réfléchi doit passer par le foyer F , le rayon étant paraxial.

On vérifie effectivement que h tend vers zéro si α tend vers zéro puisque $F(\alpha)$ tend vers zéro.

Commentaire : un développement limité à l'ordre 2 en α de $F(\alpha)$ montre que $F(\alpha) = \frac{\alpha^3}{2}$ c'est-à-dire $h = d \frac{\alpha^2}{2}$.

b) Le rayon de la tache centrale de diffraction s'exprime selon $1,22 \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{D}$ (revoir l'exercice 1 du chapitre 1).

Pour que la tache due à l'aberration sphérique soit plus petite, il faut donc résoudre :

$$h < 1,22 \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{D} \quad (4)$$

Le cas le plus défavorable à la validité de (4) correspond à $d = \frac{D}{2}$ pour lequel on a la valeur maximale de h . D'autre part, $\alpha = \alpha_m$ est maximal car $\sin \alpha = \frac{d}{R}$ est maximal. Ainsi, on a :

$$h_{\max} = R \cdot F(\alpha_m) \text{ où } \sin \alpha_m = \frac{D}{2R} = \frac{D}{4f'}$$

(4) se réécrit donc selon :

$$\begin{aligned} 2f' \cdot F(\alpha_m) &< 1,22 \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{D} \\ \Leftrightarrow F(\alpha_m) &< \frac{0,61 \times \lambda}{D} \quad (5) \end{aligned}$$

c) Application numérique :

$$\sin \alpha_m = \frac{D}{4f'} \approx 2,08 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \alpha_m \approx 1,194^\circ$$

$$\text{donc : } F(\alpha_m) = \frac{\tan 2\alpha_m}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \approx 4,52$$

$$\Rightarrow h_{\max} = 2f' \cdot F(\alpha_m) \approx 10,9 \mu\text{m}$$

$$\text{et : } r_d = 1,22 \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{D} \approx 8,1 \mu\text{m}$$

- Commentaire du résultat obtenu :

On peut espérer réduire l'aberration de sphéricité, c'est-à-dire h en diminuant d ($h = d \frac{\alpha^2}{2}$ si α petit), donc en diaphragmant. Toutefois il subsistera une tache due à la diffraction dont le rayon r_d est presque aussi grand que h_{\max} . La correction éventuelle de l'aberration de sphéricité ne sera donc pas déterminante.

d) Puisqu'ici $\frac{D}{R} \ll 1$, on a $\sin \alpha_m = \frac{D}{2R} \ll 1$ soit α_m petit.

On peut donc faire un développement limité en α_m de $F(\alpha_m)$ à l'ordre 3 :

$$(3) \Rightarrow F(\alpha_m) = \frac{\tan 2\alpha_m}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha_m} - 1 \right) = \frac{2\alpha_m}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha_m^2}{2}} - 1 \right) = \left(1 + \frac{\alpha_m^2}{2} - 1 \right) = \frac{\alpha_m^3}{2}$$

(5) se réécrit alors selon : $\alpha_m^3 < \frac{1,22\lambda}{D}$.

Soit avec $\alpha_m = \frac{D}{2R}$: $\frac{D^3}{8R^3} < \frac{1,22\lambda}{D}$ (6).

On introduit alors ϵ en développant $\epsilon \left(d = \frac{D}{2} \right)$ au même ordre en $\frac{D}{R}$:

$$\epsilon \left(\frac{D}{2} \right) = R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} - \frac{D^2}{8R} = R - R \cdot \left(1 - \frac{D^2}{4R^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{D^2}{8R}$$

$$\Rightarrow \epsilon \left(\frac{D}{2} \right) = R - R \left(1 - \frac{D^2}{8R} - \frac{D^4}{128R^3} \right) - \frac{D^2}{8R} = \frac{D^4}{128R^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D^4}{8R^3} = 16 \times \epsilon \left(\frac{D}{2} \right)$$

(6) devient donc : $16 \times \epsilon \left(\frac{D}{2} \right) < 1,22\lambda$

$$\Leftrightarrow \boxed{\epsilon \left(\frac{D}{2} \right) < \frac{1,22\lambda}{16}}$$

Le passage du miroir sphérique au miroir parabolique ne sera pas forcément aisé pour des petites longueurs d'ondes puisque l'épaisseur maximale à enlever $\epsilon \left(d = \frac{D}{2} \right)$ sera très faible.

Exemple : une radiation de couleur jaune et de longueur d'onde $\lambda = 580 \text{ nm}$ conduit à :
 $\epsilon_{\max} = 4,42 \cdot 10^{-8} \text{ m}$!

Lentilles minces sphériques

Introduction

La lentille est un système optique d'usage très répandu dans de nombreux dispositifs aussi divers qu'un microscope, un appareil photographique, un verre de lunette ou encore un rétroprojecteur.

À la fin de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de déterminer l'image d'un objet à travers une lentille mince (nature, taille et position) par construction géométrique ou calcul algébrique.

Plan du chapitre 5

A. Lentilles sphériques	148
B. Algébrisation – espaces objet et image	150
C. Stigmatisme et aplanétisme d'une lentille mince	151
D. Propriétés des lentilles minces	153
1. Centre optique d'une lentille mince	153
2. Foyers, plans focaux, distances focales	154
3. Vergence	156
E. Construction géométrique d'une image	156
1. Trajet d'un rayon lumineux quelconque	156
2. Image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique	159
F. Relations de conjugaison et de grandissement	161
1. Relations de conjugaison avec origine au centre	161
2. Relations de conjugaison avec origine aux foyers	162
G. Associations de lentilles minces	163
1. Lentilles accolées	163
2. Lentilles non accolées	163
H. Aberration chromatique d'une lentille	164
1. Mise en évidence expérimentale	164
2. Correction de l'aberration chromatique	165
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre	167
<i>Énoncés des exercices</i>	171
<i>Solutions des exercices</i>	175

A – Lentilles sphériques

Après avoir présenté les lentilles réelles, nous nous intéresserons aux lentilles dites minces, généralement sphériques, pour donner leurs propriétés ainsi que les constructions géométriques d'images ou les calculs algébriques des caractéristiques de ces images.

A.1. Lentilles réelles

Les points d'intersection de l'axe de révolution avec les dioptrés sphériques délimitant la lentille sont appelés sommets des dioptrés, ici S_1 et S_2 .

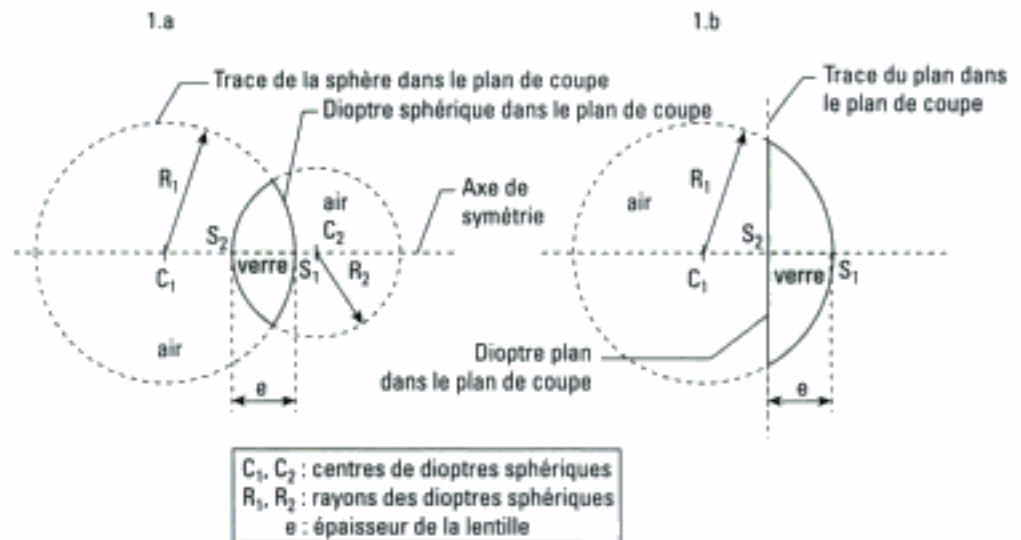


Fig. 1

Coupes schématiques d'une lentille biconvexe (1.a) et plan convexe (1.b).

Définition 1

Lentille sphérique

Une lentille¹ est un milieu transparent homogène et isotrope limité par deux dioptrés sphériques (de centres C_1 et C_2) ou un dioptré sphérique et un dioptré plan. L'axe de révolution de cette lentille est son axe optique.

1. Notre étude supposera que la lentille est plongée dans un même milieu à son entrée et à sa sortie.

2. Ce tracé peut être réalisé en appliquant les lois de Snell-Descartes de la réfraction.

Il existe deux catégories de lentilles :

- **les lentilles convergentes** : le rayon lumineux émergent² de la lentille est dévié vers l'axe optique comme le montre la figure 2.

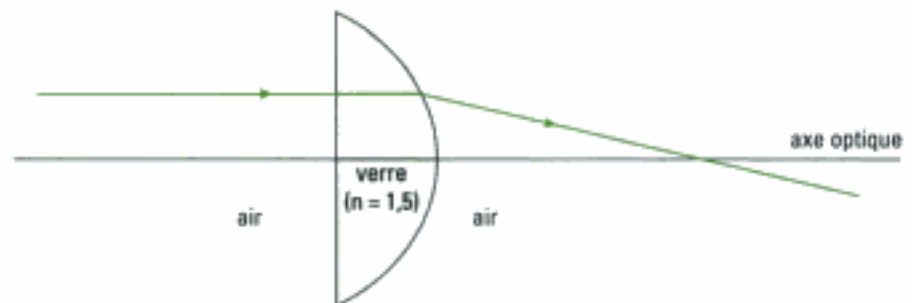


Fig. 2

Convergence dans le cas d'une lentille sphérique plan convexe.

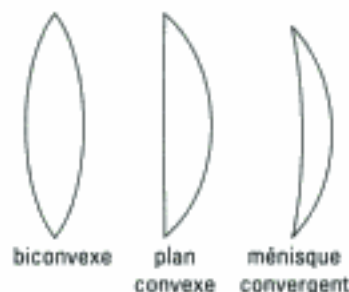


Fig. 3

Il existe trois types de lentilles convergentes dont les représentations en coupe sont données ci-contre en figure 3. Les bords de chaque lentille sont minces par rapport à son épaisseur au centre.

1. Le rayon émergent d'une lentille à bords épais s'écarte de l'axe optique à la condition que l'indice du milieu extérieur à la lentille soit inférieur à celui du milieu qui la compose. De même, le rayon émergent d'une lentille à bords minces peut s'écarter de l'axe optique si cette lentille est plongée dans un milieu plus réfringent !

• **les lentilles divergentes** : le rayon lumineux émergent¹ de la lentille s'écarte de l'axe optique comme le montre la figure 4.

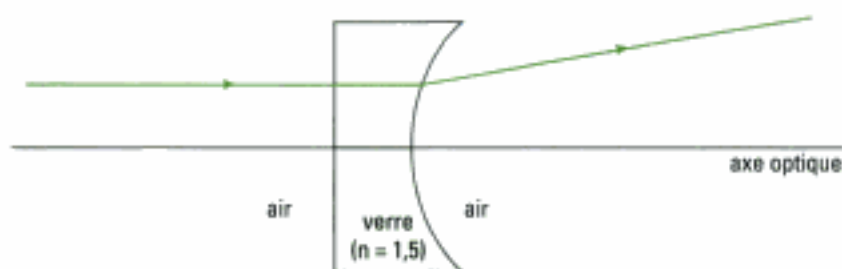


Fig. 4

Divergence dans le cas d'une lentille sphérique plan concave.

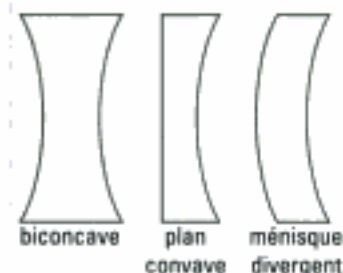


Fig. 5

Lentilles à bords épais

On rencontre trois types de lentilles divergentes dont les représentations en coupe sont données ci-contre en figure 5. Les bords de ces lentilles sont épais par rapport à leur épaisseur au centre.

Nous allons terminer cette présentation des lentilles sphériques réelles en définissant les propriétés d'un point particulier appelé centre optique noté O :

- ce point est situé entre S_1 et S_2 pour une lentille biconvexe ;
- tout rayon dont le trajet intérieur à la lentille passe par le centre optique, ressort de la lentille parallèlement à la direction du rayon incident.

Illustrons ces propriétés sur le tracé suivant :

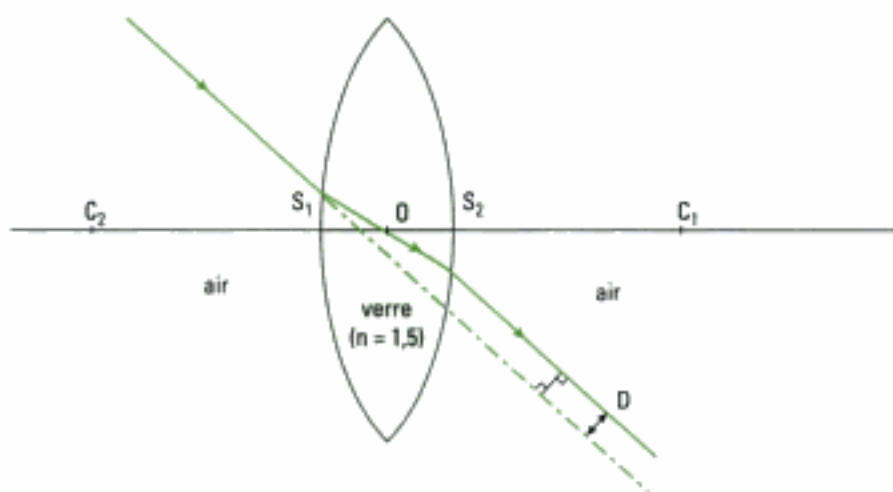


Fig. 6

Trajectoire d'un rayon lumineux incident passant par O.

Sur la figure ci-contre, O est équidistant des sommets car il s'agit du cas particulier où les rayons de courbure sont égaux.

A.2. Approximation de la lentille mince sphérique

Une lentille sphérique est dite mince lorsque son épaisseur e est très petite devant les rayons de courbure R_1 et R_2 des dioptrés² délimitant la lentille. On démontre qu'il est nécessaire d'avoir :

$$e \ll |R_1| ; e \ll |R_2| ; e \ll |R_1 - R_2|$$

Sur la figure 7 en page suivante, e n'est pas négligeable devant $|R_1 - R_2|$:

2. L'étude du dioptré sphérique n'est pas au programme.

3. L'emploi des valeurs absolues est justifié par le fait que les rayons de courbures sont des grandeurs algébriques.

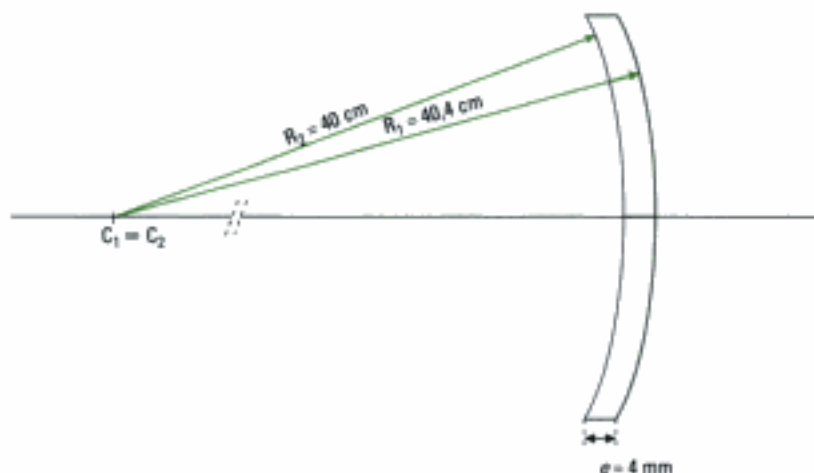


Fig. 7

Exemple d'une lentille ne vérifiant pas la condition $e \ll |R_1 - R_2|^1$

1. Le signe « \ll » signifie « très inférieur à » ($\frac{e}{|R_1 - R_2|}$ doit être de l'ordre du centième).

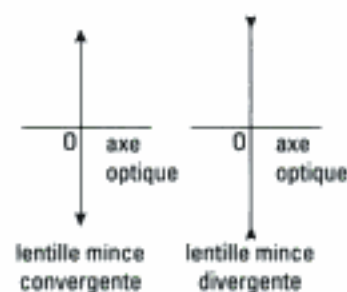


Fig. 8

Il ne s'agit donc pas d'une lentille mince bien que l'épaisseur soit faible devant $|R_1|$ et $|R_2|$.

Les symboles pour les deux types de lentilles minces sont donnés ci-contre (fig. 8).

B. Algébrisation, espaces objet et image

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, les relations de conjugaison sont algébriques. Une convention existe, qui fixe le sens positif : ce sens est celui de la lumière incidente.

Traditionnellement, en optique, les figures sont faites avec la lumière progressant de la gauche vers la droite.

Le symbole \oplus indique le sens de propagation réel de la lumière.

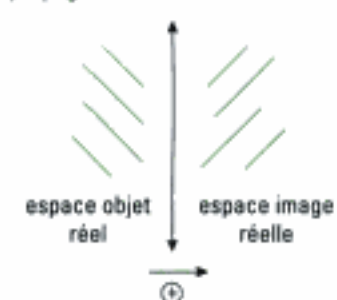


Fig. 10

Espaces objet et image d'une lentille mince

2. Les résultats sont identiques pour une lentille divergente.



Fig. 9a

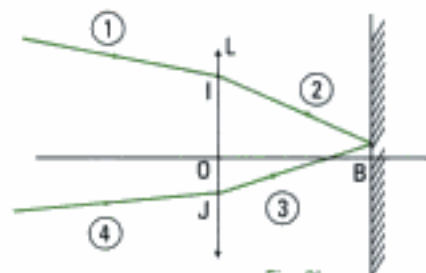


Fig. 9b

Fig. 9

Orientation conventionnelle d'un rayon lumineux à la traversée d'une lentille.

Dans le cas de la figure 9.a, le rayon incident progresse de la gauche vers la droite, ce qui fixe le sens positif. Ainsi le rayon émergent progresse dans ce sens positif. Nous aurons donc $\overline{OA} > 0$.

Pour la figure 9.b :

- En I, la lumière vient de la gauche le sens positif est donc de gauche à droite. Ainsi $\overline{OB} > 0$.

- En J, la lumière vient de la droite ; le sens positif est donc de droite à gauche. Ainsi $\overline{OB} < 0$.

- **Espaces objet et image** : ils déterminent la nature (réelle ou virtuelle) d'un objet ou d'une image selon leur position par rapport à la lentille, sans oublier de considérer le sens de propagation réel de la lumière : ils sont définis en figure 10².

C. Stigmatisme et aplanétisme d'une lentille sphérique

Étudions qualitativement une première simulation de trajets de rayons lumineux. La lentille L plan convexe est ici éclairée par une source ponctuelle A située sur l'axe optique, à grande distance de la lentille. De ce fait, les rayons qui arrivent sur la lentille sont parallèles. Un diaphragme \mathcal{D} limite la section du faisceau incident sur la lentille¹ :

1. Cette simulation est réalisée pour une radiation lumineuse monochromatique. Elle ne prend donc pas en compte les aberrations chromatiques de la lentille que nous étudierons ultérieurement.

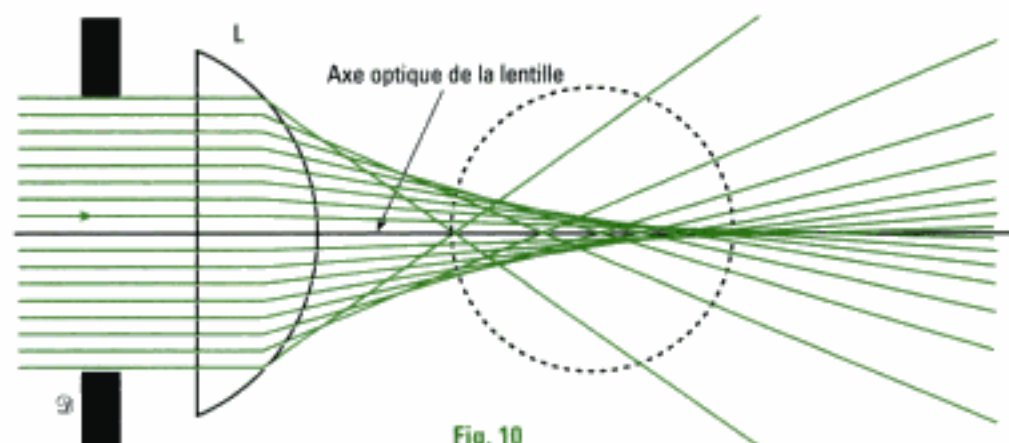


Fig. 10

Effectuons un agrandissement de la partie entourée en pointillés et plaçons successivement 3 écrans en position E_1 , E_2 et E_3 perpendiculairement à l'axe optique.

Les disques D_1 , D_2 et D_3 représentent la trace du faisceau lumineux sur les écrans E_1 , E_2 et E_3 vus de face.

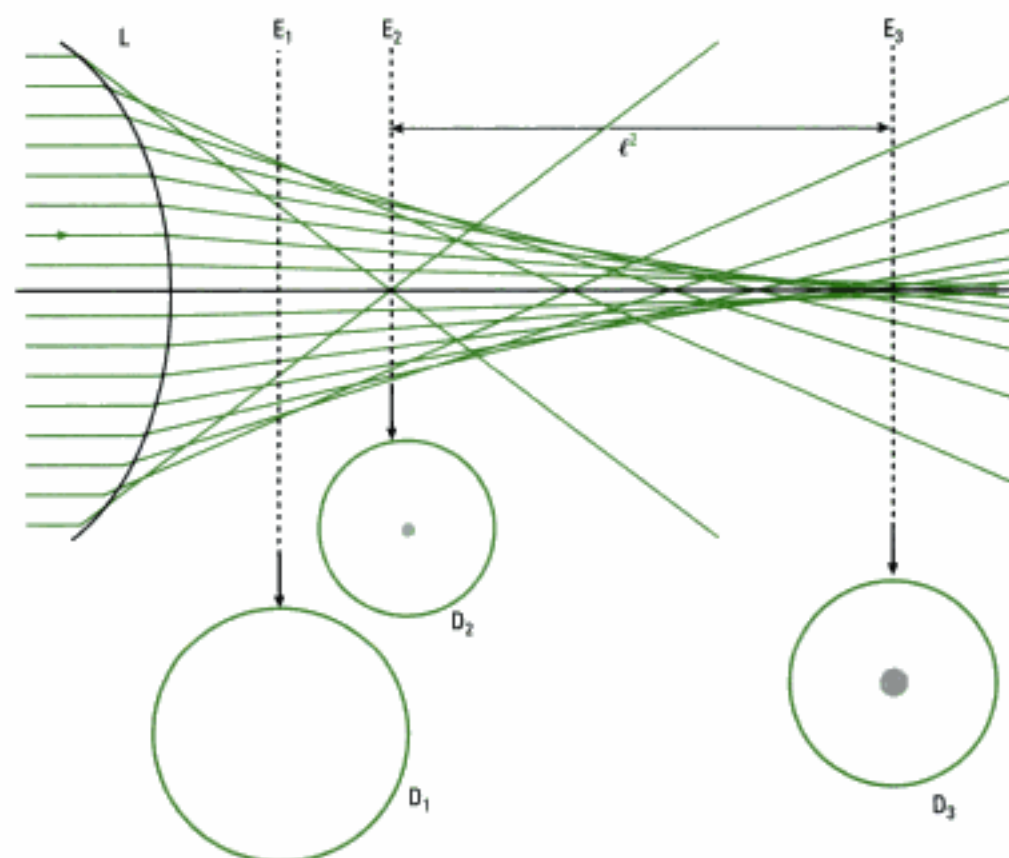


Fig. 11

Simulation de trajets lumineux pour une lentille plan convexe diaphragmée

Sur l'écran placé en E_1 , l'observateur voit une tache circulaire dont le périmètre est plus lumineux. En E_2 , s'y ajoute un point lumineux au centre. Enfin

2. Nous observons ici une aberration géométrique dite de sphéricité. La distance l est appelée aberration longitudinale.

1. Notons que la notion d'image ponctuelle est toujours définie relativement à la résolution du capteur. Ainsi un capteur CCD placé en E_1 , E_2 ou E_3 et dont le pixel aurait même dimension que les taches observées à ces positions donnerait du point A une image ponctuelle à son échelle.

2. En l'absence d'informations sur le capteur, nous pouvons considérer à ce stade que les conditions $\ell \ll e$ ou $\ell \ll D$ font que le stigmatisme est approché.

Pour un angle de 25° , nous observons qu'il n'y a pas de point image tout comme en figure 11. Ceci est dû à l'aberration de sphéricité encore présente mais aussi à la coma, aberration due à l'inclinaison sur l'axe, à l'astigmatisme et à la courbure de champ, aberrations dus à l'importance de l'angle sous lequel est vu l'objet.

Pour un angle de 10° , l'image est quasi ponctuelle. Il y a stigmatisme approché.

en E_3 , la tache est peu lumineuse à l'exception du centre qui est fortement éclairé.

Nous en concluons que l'image¹ de A donnée par la lentille n'est pas ponctuelle. Il n'y a donc **pas de stigmatisme rigoureux** pour une lentille.

Diminuons à présent l'ouverture du diaphragme \mathcal{D} dans la simulation précédente :

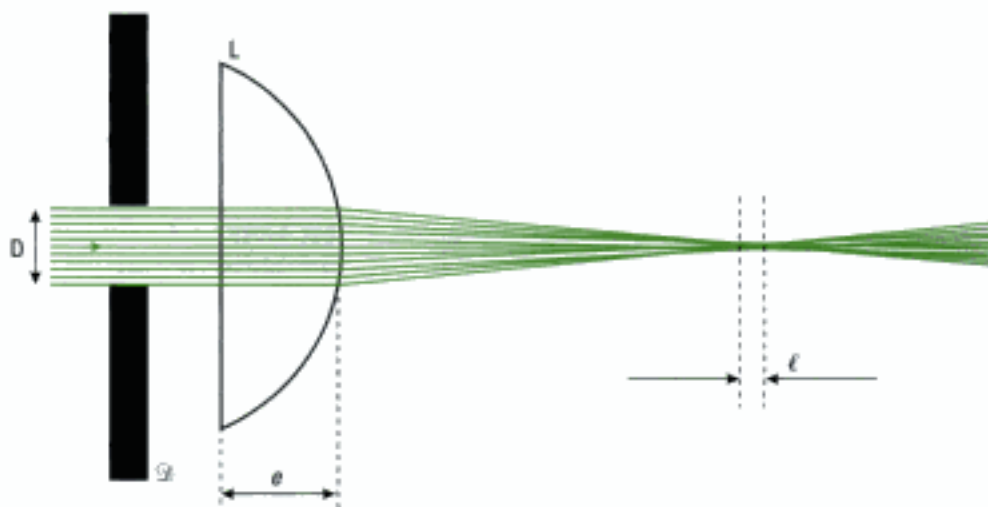


Fig. 12

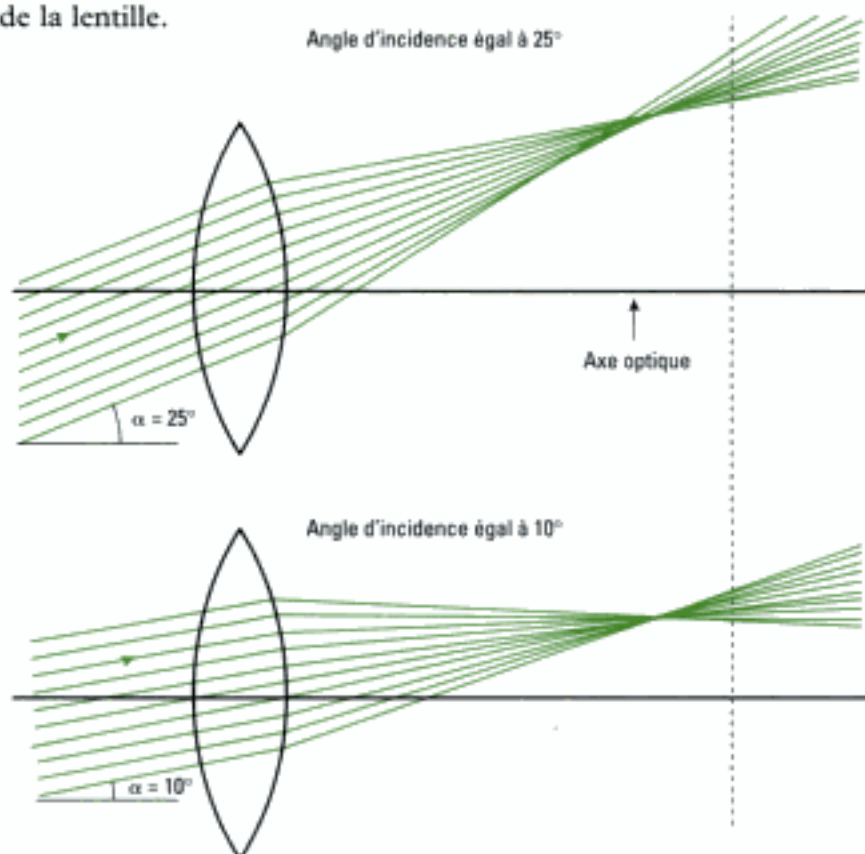
Simulation obtenue en réduisant l'ouverture de \mathcal{D} .

Nous observons que :

- l'aberration longitudinale ℓ est considérablement réduite ;
- le diamètre de la tache lumineuse dans la zone d'aberration longitudinale est petit.

Dans ce cas, **le stigmatisme approché² est vérifié** pour la lentille.

Sur la simulation donnée en figure 13, une lentille biconvexe est éclairée par un point objet A à l'infini sous quatre angles d'incidence différents : 25° , 10° , 5° et 0° . Ce sont les angles sous lesquels l'objet A est vu depuis la face d'entrée de la lentille.



Pour un angle de 5° , il y a encore stigmatisme approché.

À l'incidence nulle, l'image se forme sur l'axe. Nous pouvons remarquer que les positions de l'image pour les angles de 10° et 5° sont très proches de π' , plan qui contient l'image pour l'incidence 0° . Entre 0° et 10° , l'image se trouve ainsi quasiment dans un plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F' . Dans ces conditions, il y a aplanétisme approché. Notons que la courbure de champ est l'aberration responsable de la déviation de la tache image qui s'éloigne progressivement du plan π' lorsque α augmente.

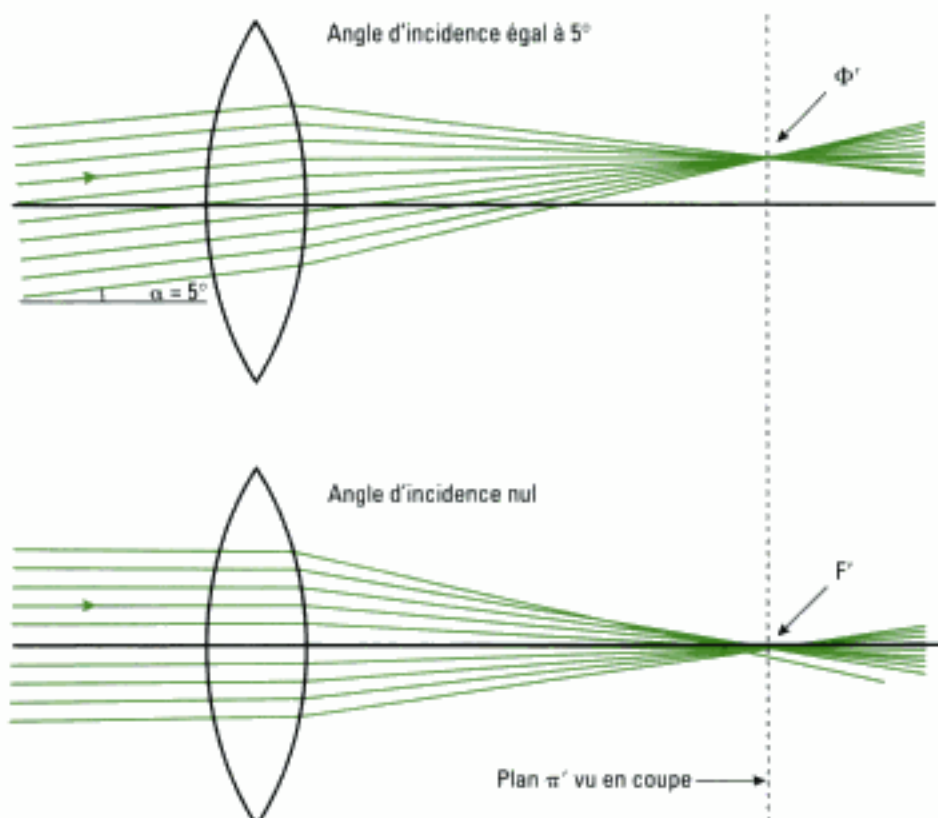


Fig. 13

Simulation de trajets lumineux pour une lentille biconvexe (indice 1,40 ; épaisseur 1,4 cm) sous différentes incidences.

En conclusion :

Une lentille sphérique peut être considérée stigmatique et aplanétique au sens du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés :

- si les rayons sont parallèles à l'axe et peu éloignés de l'axe (fig. 12) ;
- si les rayons sont peu inclinés¹ sur l'axe optique (fig. 13).

Ces conditions du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés sont **les conditions de Gauss**.

Dans la suite, tous les systèmes optiques à base de lentilles que nous envisagerons seront utilisés dans les conditions de Gauss².

D. Propriétés des lentilles minces

D.1. Centre optique d'une lentille mince

Si la lentille réelle représentée en figure 6 peut être considérée comme mince, alors les sommets S_1 et S_2 qui délimitent le dioptre sont confondus avec le centre optique O . Le décalage latéral D est alors nul.

Propriété 1

Tout rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille mince n'est pas dévié.

Le point O est donc à l'intersection de l'axe optique et du plan de la lentille mince comme le montre la figure 14.

Remarque : ce résultat est également valable pour une lentille divergente.

1. En pratique, le rayon sera estimé peu incliné sur l'axe si α ne dépasse pas 10° .

2. La plupart du temps, les effets dus à la diffraction introduite par la monture de la lentille sont négligeables (voir l'exercice 1 du chapitre 1).

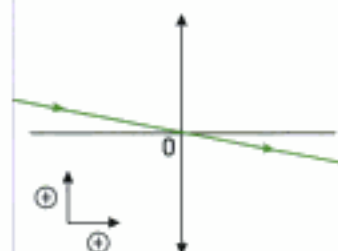


Fig. 14

Trajectoire d'un rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille mince.

Hidden page

Le point Φ' qui a été mis en évidence lors de l'étude du stigmatisme de la lentille plan convexe (fig. 13) nous conduit à donner la définition suivante :

Définition 5

Un faisceau de rayons parallèles issus de l'espace objet, inclinés sur l'axe optique, donne un faisceau émergent de rayons dont les *supports*² se croisent en un point image Φ' du plan focal image. Φ' est obtenu par intersection du plan focal image et du rayon non dévié, parallèle au faisceau incident et passant par le centre optique.

Ce cas correspond à celui d'une source située à l'infini, en dehors de l'axe optique et servant d'objet à la lentille mince étudiée :

1. Un support tracé en traits mixtes n'est pas un rayon lumineux mais indique seulement une direction.

Sur la figure 17.a, nous avons mis en évidence le faisceau lumineux délimité par deux rayons limites.

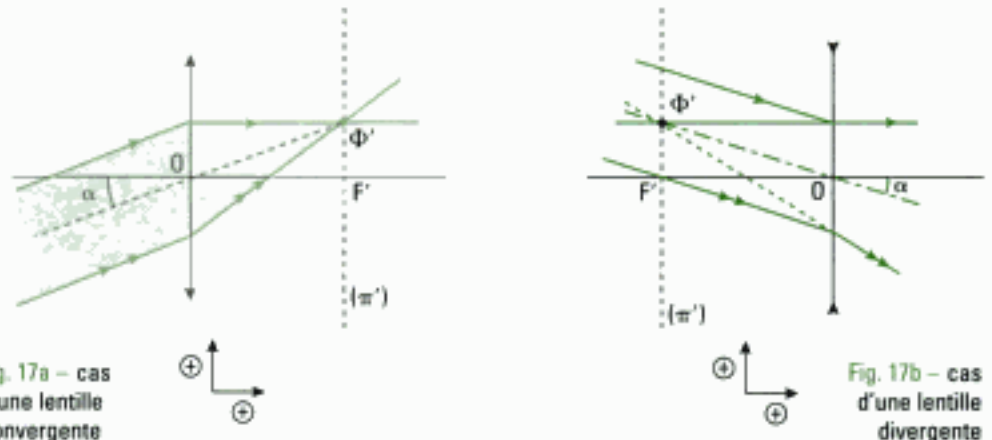


Fig. 17

Point objet situé à l'infini vu sous un angle α .

Remarque : lorsque les rayons émergents se coupent virtuellement en Φ' , seuls leurs supports se croisent.

Définition 6

L'image d'un point Φ , appartenant au plan focal objet et situé hors de l'axe optique, est rejetée à l'infini dans la direction du support passant par Φ et O.

Sur la figure 18.b nous avons tracé le faisceau lumineux à la traversée d'une lentille divergente.

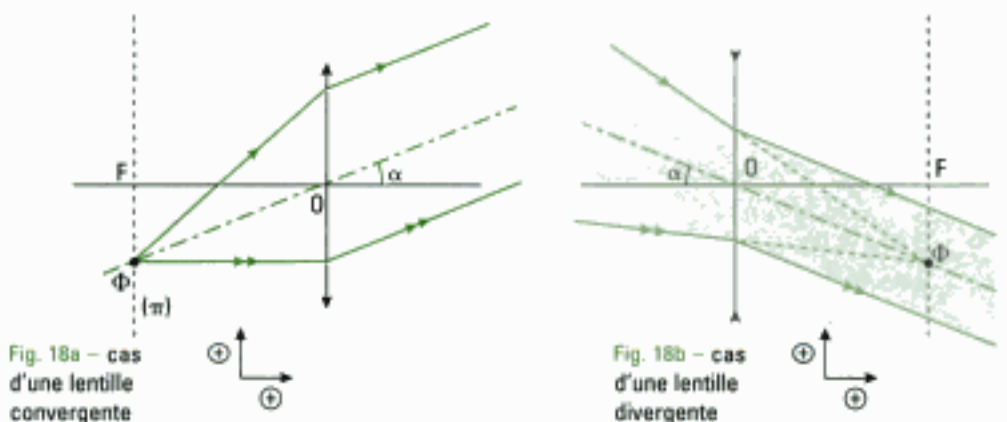


Fig. 18

Image située à l'infini et vue sous un angle α .

Définition 7

Les mesures algébriques \overline{OF} et $\overline{OF'}$ et sont appelées respectivement *distance focale objet* et *distance focale image* de la lentille. On note : $f = \overline{OF}$; $f' = \overline{OF'}$ et on a la relation $f = -f'$, lorsque le milieu est le même des 2 côtés de la lentille.

Pour une lentille convergente : $f' > 0$ (c'est-à-dire $f < 0$)

Pour une lentille divergente : $f' < 0$ (c'est-à-dire $f > 0$)

Unité : une distance focale s'exprime en mètres (m).

Remarque : il faut noter que selon l'usage cette grandeur est appelée « distance » mais il s'agit cependant d'une grandeur algébrique.

D.3. Vergence

Définition 8

La vergence V d'une lentille est l'inverse de la distance focale image. Ainsi :

$$V = \frac{1}{f'}$$

Unité : une vergence s'exprime en dioptries (δ) avec $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$

Exemple : une lentille de vergence -5 est divergente et sa distance focale image vaut $-0,2$ m.

E. Construction géométrique d'une image

Nous supposons dans la suite de ce cours que la position du centre et des foyers des lentilles étudiées sont connus.

L'objet, ou le point objet, étant connus, nous chercherons alors son image par la lentille. Lorsqu'il s'agira de construire l'image donnée par une lentille d'un objet, celui-ci sera aussi connu.

Pour parvenir à cette image nous envisagerons plusieurs méthodes de construction géométrique comme par exemple celle qui permet la détermination d'un rayon émergent correspondant à un rayon incident donné.

E.1. Trajet d'un rayon lumineux quelconque

E.1.1 – Le rayon incident est connu

E.1.1.1 Cas d'une lentille convergente

Le rayon incident passe nécessairement par un point Φ du plan focal objet π que l'on fait apparaître sur la figure 19.a.

Sur la figure 19.b, on imagine ensuite un support incident parallèle à l'axe optique et passant par F : ce support émerge de la lentille en passant par F' (définition 3).

L'émergent ③ cherché est parallèle au support émergent ② : figure 19.c. En effet, F étant un point du plan focal objet, on applique la définition 6.

Seul le rayon ① est connu.

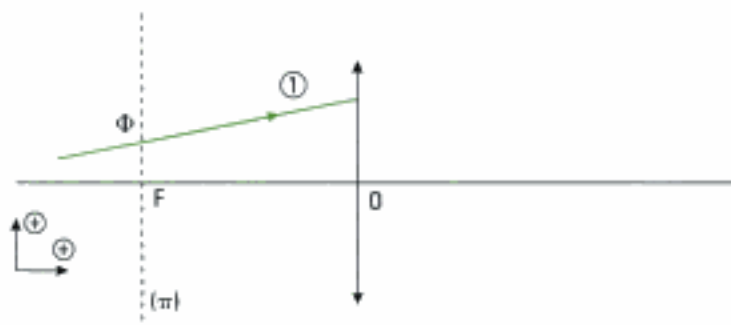


Fig. 19a

② n'est pas un rayon lumineux mais une direction utile à la construction.

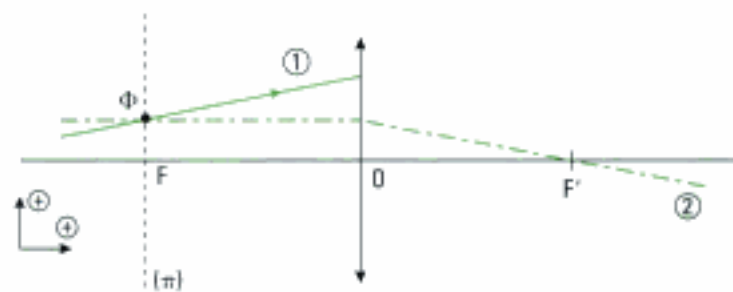


Fig. 19b

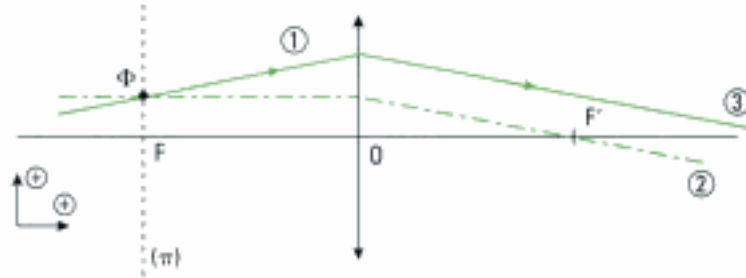
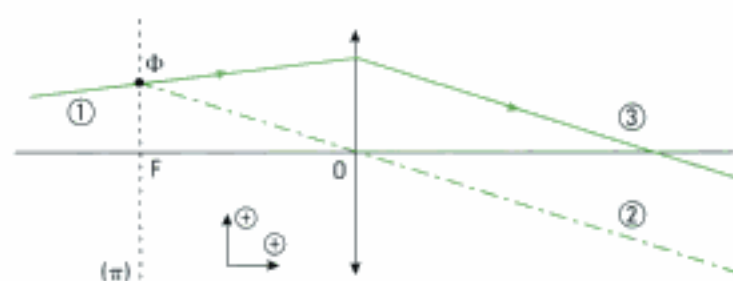


Fig. 19c

Fig. 19

Utilisation d'un support passant par Φ et parallèle à l'axe optique.

Nous pouvons aussi utiliser un support passant par Φ et le centre optique en appliquant toujours la définition 6 :

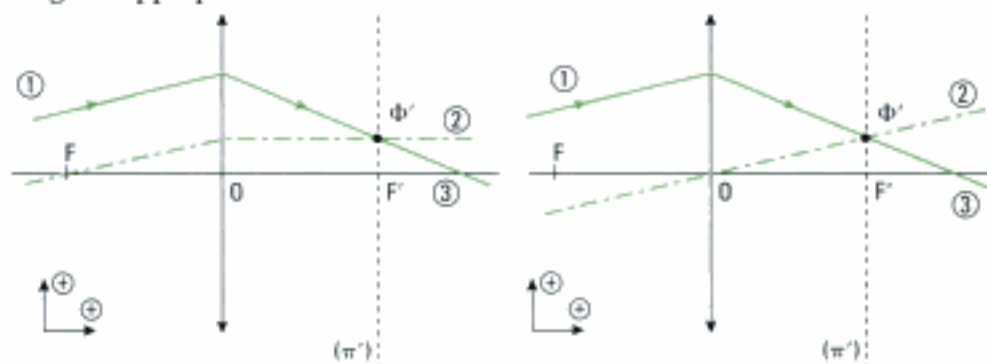


① connu, faire apparaître Φ , tracer ②, puis tracer ③

Fig. 20

Utilisation d'un support passant par Φ et le centre optique.

Nous pouvons également utiliser un point Φ' appartenant au plan focal image et appliquer la définition 5 :



① connu, tracer ② faire apparaître Φ' puis tracer ③

Fig. 21.a

Fig. 21.b

Fig. 21

Utilisation d'un point Φ' du plan focal image.

La position de Φ' dans le plan focal image est obtenue en utilisant :

- le support incident passant par F et parallèle à ① sur la figure 21.a. ;
- le support passant par O et parallèle à ① sur la figure 21.b.

E.1.1.2 - Cas d'une lentille divergente

Sur le même principe, nous pouvons tracer le rayon qui émerge d'une lentille divergente à partir d'un rayon incident quelconque par quatre constructions géométriques différentes données en figure 24.

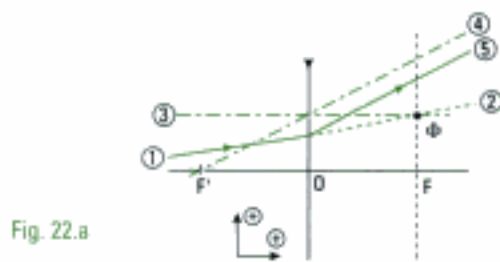


Fig. 22.a

① connu, tracer ② faire apparaître Φ et tracer ③ puis ④ puis ⑤

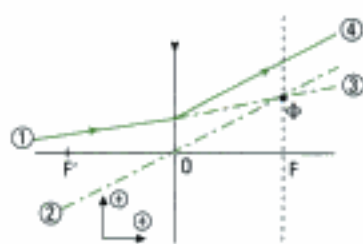


Fig. 22.b

① connu, tracer ② faire apparaître Φ , tracer ③ puis ④

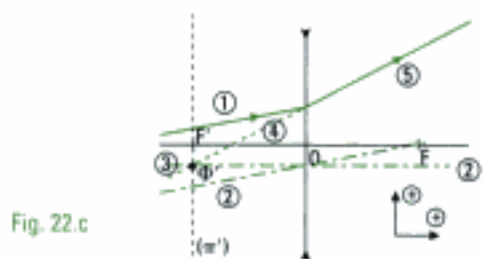


Fig. 22.c

① connu, tracer ② faire apparaître Φ' et tracer ③ puis ④ puis ⑤

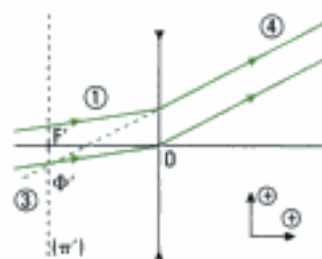


Fig. 22.d

① connu, tracer ② faire apparaître Φ' , tracer ③ puis ④

Fig. 22

Construction d'un rayon émergent d'une lentille divergente.

E.1.2 – Le rayon émergent est connu

Nous pouvons utiliser les mêmes méthodes que celles énoncées dans le cas où le rayon incident est connu. Il sera possible d'utiliser les points F ou F' comme précédemment.

E.1.2.1 – Cas d'une lentille convergente

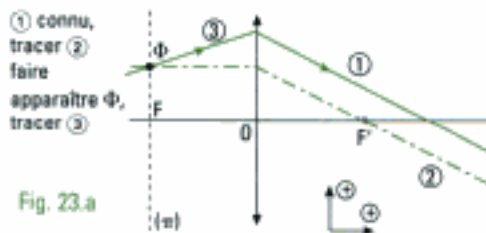


Fig. 23.a

① connu, tracer ② faire apparaître Φ , tracer ③

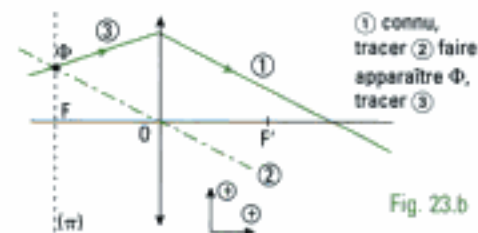


Fig. 23.b

① connu, tracer ② faire apparaître Φ , tracer ③

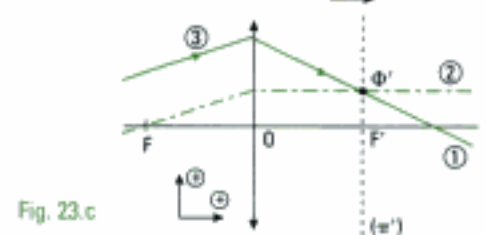


Fig. 23.c

① connu, faire apparaître Φ' , tracer ② puis ③

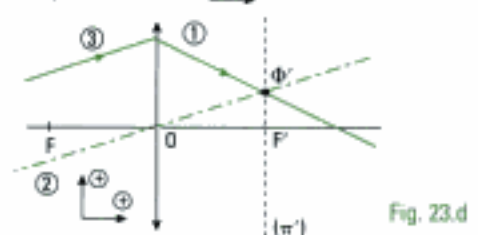


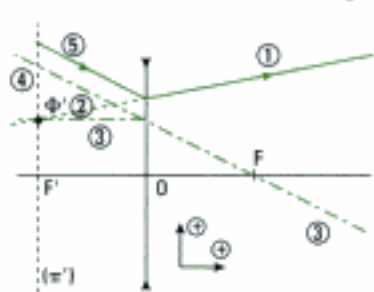
Fig. 23.d

① connu, faire apparaître Φ' , tracer ② puis ③

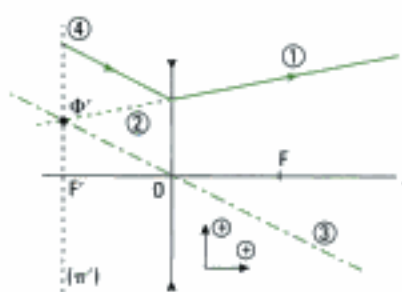
Fig. 23

Construction du rayon incident correspondant à un émergent connu

E.1.2.2 – Cas d'une lentille divergente



① connu, tracer ② et faire apparaître Φ' , tracer ③ puis ④ puis ⑤



① connu, tracer ② et faire apparaître Φ' , tracer ③ puis ④

Le principe de retour inverse de la lumière est mis à profit sur la figure 23.c pour tracer le support ② en partant du point Φ' .

Hidden page

De même, 2 rayons particuliers suffisent à déterminer l'image d'un objet formé par une lentille divergente :

Bien noter la nature des foyers dans les espaces objet et image compte tenu de la nature de la lentille.

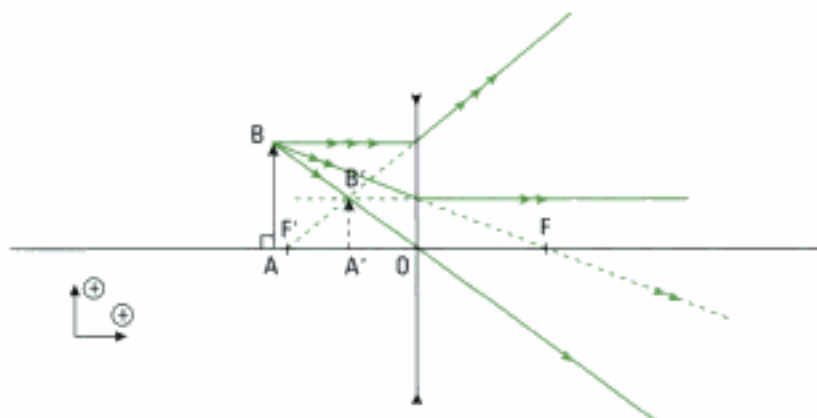


Fig. 26

Construction de l'image d'un objet dans le cas d'une lentille divergente.

1. Sur la figure 27.a, l'image étant orientée dans le même sens que l'objet, elle est dite droite.

Selon la position de l'objet AB par rapport aux foyers et au centre optique de la lentille, la nature de l'image $A'B'$ (réelle ou virtuelle) et son orientation vont évoluer. Nous donnons sur les figures 27 et 28 quelques cas de figures possibles :

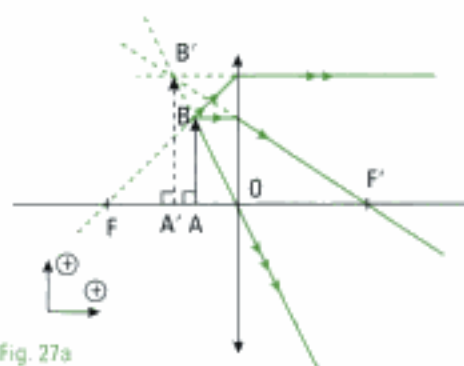


Fig. 27a

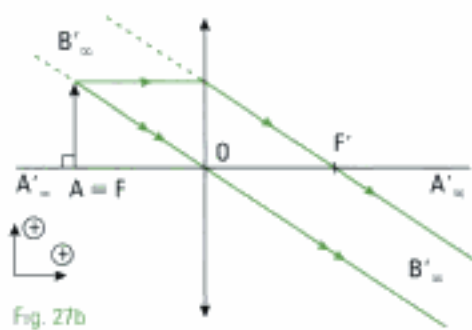


Fig. 27b

Fig. 27

Images d'un objet données par une lentille convergente.

Remarque : Si l'objet AB est dans les plans focaux (objet ou image), son image est rejetée à l'infini (à $\pm \infty$). C'est le cas sur la figure 27.b.

Sur la figure 28.a, l'objet AB est virtuel, l'image réelle est droite. Sur la figure 28.b, l'image est virtuelle et de sens opposée à l'objet : elle est dite renversée. En pratique, lorsque l'objet AB est virtuel, les rayons incidents sont issus d'un autre système optique situé à gauche de la lentille étudiée.

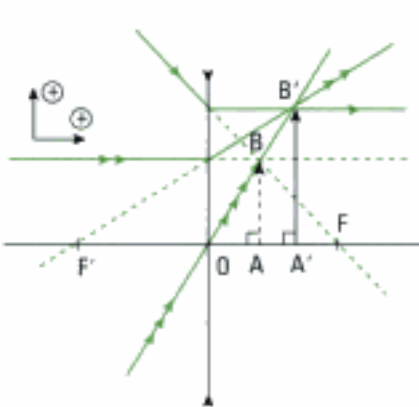


Fig. 28a

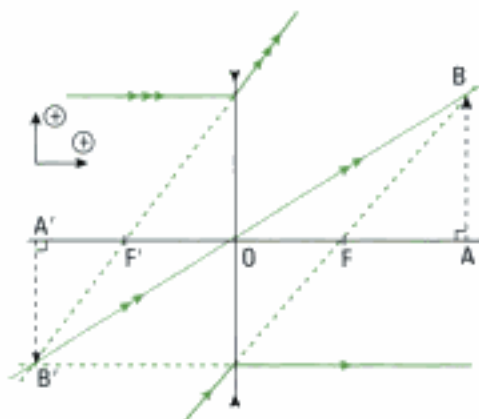


Fig. 28b

Fig. 28

Images d'un objet donnée par une lentille divergente.

Remarque : L'exercice 2 propose l'étude du cas d'un objet étendu à l'infini centré sur l'axe optique.

F . Relations de conjugaison et de grandissement

Les relations établies dans ce paragraphe sont indépendantes de la nature de la lentille. Nous considérons ici le cas d'une lentille convergente mais les résultats restent valables dans le cas d'une lentille divergente.

F.1. Relations de conjugaison avec origine au centre

Soit une lentille convergente qui donne d'un objet réel AB une image réelle $A'B'$:

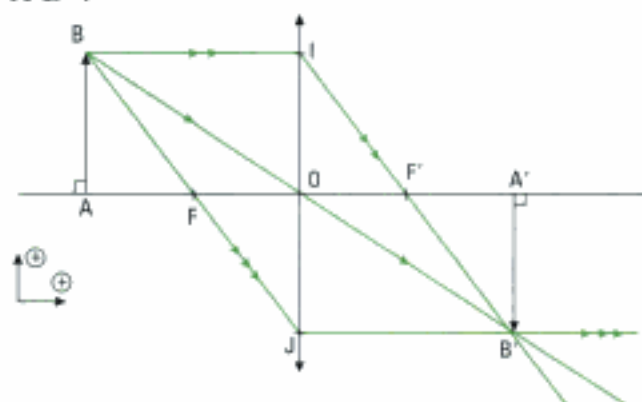


Fig. 29
Construction géométrique permettant la détermination des relations algébriques

Les triangles OAB et $OA'B'$ sont des triangles semblables dans lesquels nous pouvons appliquer le théorème de Thalès ce qui conduit immédiatement à l'expression du grandissement transversal γ' :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (1)$$

$$\text{D'autre part : } \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad (2)$$

car les triangles $F'OI$ et $F'A'B'$ sont aussi semblables. De plus

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}} = 1 + \frac{\overline{OA'}}{\overline{F'O}} \quad (3)$$

Les égalités (1) et (3) donnent donc : $1 + \frac{\overline{OA'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ et en divisant les deux membres de cette égalité par $\overline{OA'}$ nous obtenons :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}}$$

Cette relation de conjugaison fait intervenir le centre optique : c'est la **relation de Descartes**.

Application 1 Dans une expérience d'optique, l'image d'un objet virtuel est formée à l'aide d'une lentille divergente de distance focale $|f'| = 20$ cm. L'objet est à 25 cm de la lentille. Calculer la distance entre la lentille et l'image en précisant sa nature.

Solution

Appliquons la relation de conjugaison précédente. Ainsi :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \text{ et donc : } \overline{OA'} = \frac{\overline{OF'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OF'} + \overline{OA}} = \frac{-20 \times 25}{-20 + 25} = -100 \text{ cm}$$

$\overline{OA'} < 0$ donc A' est dans l'espace objet, c'est-à-dire avant la lentille : l'image est virtuelle et renversée.

1. Lorsque $\gamma > 0$, l'image est droite et lorsque $\gamma < 0$ l'image est renversée.

F.2. Relations de conjugaison avec origine aux foyers

Nous allons montrer que le grossissement transversal peut s'exprimer en fonction de \overline{FA} ou $\overline{F'A'}$, puis en déduire une relation de conjugaison liant \overline{FA} et $\overline{F'A'}$.

La relation (2) fournit immédiatement une expression du grandissement qui fait intervenir le foyer image de la lentille :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Cherchons alors une relation qui contienne \overline{FA} ; en remarquant que les triangles FOJ et FAB sont semblables on peut écrire :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{f}{\overline{FA}}$$

Par conséquent :

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f}{\overline{FA}}$$

Cette dernière égalité fournit également la relation de conjugaison cherchée :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = f \cdot f'$$

Cette relation de conjugaison fait intervenir les foyers de la lentille : c'est la **relation de Newton**.

Conseil : En pratique, l'énoncé d'un exercice définit les données par rapport au centre ou au(x) foyer(s) : il est donc recommandé de choisir la relation dont l'origine est suggérée par l'énoncé.

Application 2 La distance minimale d_m de vision nette d'un œil sans défaut est égale à 25 cm. Un individu ayant cette faculté place son œil au foyer image d'une loupe de vergence égale à 25 δ et observe un insecte. À quelle distance de la loupe se trouve l'insecte si l'image est nette et se forme au plus près de l'œil ?

Solution

Commençons par effectuer une construction géométrique en utilisant le fait que l'image formée par une loupe est nécessairement virtuelle et agrandie :

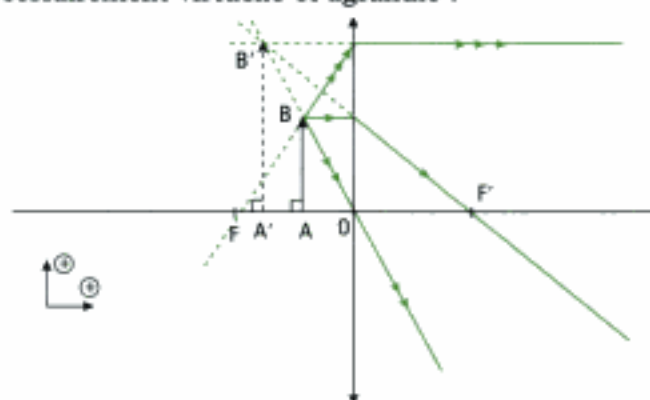


Fig. 30 Système optique étudié

Avec : $\overline{F'A'} = -d_m = -25$ cm et $f' = \frac{1}{25} = 4$ cm.

Appliquons le relation de Newton : $\overline{FA} = \frac{-f'^2}{\overline{F'A'}} = \frac{-4^2}{-25} = 0,64$ cm.

D'où : $\overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA} = -4 + 0,64 = -3,36$ cm.

L'insecte représenté par AB doit donc être placé à 3,36 cm en avant de la lentille.

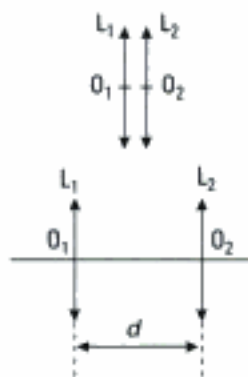


Fig. 31

1. A_1B_1 est une image intermédiaire.

Remarque : les formules de conjugaison ne sont utilisables que pour des points objet ou image situés exclusivement sur l'axe optique.

G. Association de lentilles minces

Nous nous limiterons au cas où les lentilles ont même axe optique. Nous envisagerons d'abord le cas simple de deux lentilles L_1 et L_2 accolées, c'est à dire dont les centres optiques O_1 et O_2 sont considérés comme confondus (fig. 31). Nous examinerons ensuite le cas où les centres des lentilles sont éloignés d'une distance constante comme dans la modélisation du microscope (fig. 31).

G.1. Lentilles accolées

Un objet AB a une image A_1B_1 au travers de la première lentille¹ L_1 . A_1B_1 est un objet pour la lentille L_2 qui en donne l'image A_2B_2 .

A_2B_2 est aussi l'image de AB à travers l'ensemble des deux lentilles, ce que nous résumons selon :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2$$

On peut écrire les relations de Descartes pour chacune des deux lentilles :

$$\text{Lentille } L_1 : \frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA_1}}$$

$$\text{Lentille } L_2 : \frac{1}{OA_2} - \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{OA_2} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1 \gamma_2$$

L'ensemble des 2 lentilles accolées est donc équivalent à une unique lentille L_3 de distance focale f' telle que :

$$A \xrightarrow{L} A_2 \quad \text{avec} : \frac{1}{OA_2} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'}$$

Retenons : étudier un ensemble de lentilles passe par *l'utilisation des images intermédiaires* qui conduisent à l'image définitive. On choisira la relation de conjugaison la plus intéressante en fonction des indications de l'énoncé.

G.2. Lentilles non accolées

Les centres optiques des deux lentilles sont éloignées d'une distance d fixe. Nous nous proposons de déterminer la position du foyer image F' de cet ensemble de deux lentilles non accolées qui est mis en évidence par la construction suivante :

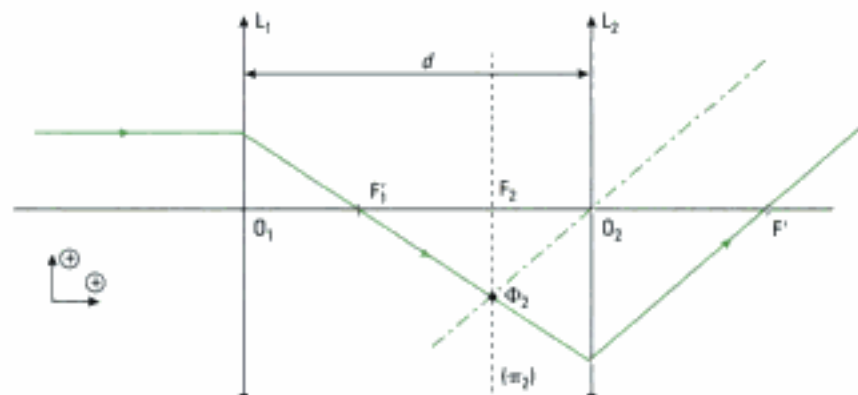


Fig. 32

Détermination graphique de la position du foyer image F' du doublet non accolé.

O_1, O_2, f'_1, f'_2 et d sont ici supposés connus. Un rayon incident parallèle à l'axe optique pour le système (L_1, L_2) émerge en coupant l'axe optique au foyer image F' du système.

Hidden page

Hidden page

Les achromats ne sont pas nécessairement constitués de lentilles minces.

En pratique, l'association des deux lentilles accolées peut être réalisée de différentes façons. Nous donnons ci-dessous deux possibilités :



Fig. 34

Représentations schématiques d'un doublet achromatique

Remarques :

- Nous avons introduit l'aberration chromatique en raisonnant dans le cas particulier où l'objet ponctuel est situé à l'infini sur l'axe. En pratique, il faut aussi analyser le cas d'un objet AB à distance finie.
- L'aberration chromatique transversale δ_T est plus significative que l'aberration chromatique longitudinale δ_L . En effet, l'image est observée et formée avant tout dans un plan perpendiculaire à l'axe optique.
- Nous avons dissocié dans ce chapitre l'étude des aberrations géométriques et des aberrations chromatiques. En pratique, la correction des aberrations géométriques permet aussi de réduire le défaut de chromatisme.

L'essentiel

Ce qu'il faut savoir...

✓ Les définitions générales

- Axe optique, centre optique, espaces objet ou image, foyers objets ou images, plans focaux, distances focales.

- Vergence d'une lentille mince :

$$V = \frac{1}{f'} \text{ avec } f' = \overline{OF'} \text{ qui représente la distance focale image algébrique (m)}$$

V désigne la vergence (δ).

✓ Les relations de conjugaison et de grandissement

- Origine au centre optique :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- Origine au foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = ff' = -f'^2$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

✓ Nature des foyers

Les foyers sont symétriques par rapport au centre optique et sont :

- réels pour une lentille convergente,
- virtuels pour une lentille divergente.

Ce qu'il faut savoir faire...

- Construire géométriquement le trajet d'un rayon lumineux quelconque.
- Construire géométriquement l'image d'un objet à travers une ou plusieurs lentilles.
- Établir les formules de conjugaison et de grandissement.
- Déterminer par calcul la position d'un objet, d'une image ou d'un foyer.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment construire géométriquement l'image d'un objet à travers une lentille mince ?

→ Problème à résoudre

On souhaite trouver l'image d'un objet connu à l'aide d'une construction géométrique.

Hidden page

Hidden page

- ② Effectuer systématiquement une construction géométrique aérée en étant très vigilant car des erreurs importantes sont souvent commises lors de cette étape : erreur de lecture, de compréhension, de report,...
- ③ Écrire les équations algébriques de conjugaison et, ou de grandissement pour les n lentilles afin d'obtenir un système de n équations au plus. Le choix de l'origine de la relation de conjugaison est guidé par le contexte de l'exercice.
- ④ Éliminer par étapes successives toutes les données se rapportant aux images intermédiaires.
- ⑤ Extraire le résultat cherché.

→ Application

Un système est constitué en entrée d'une lentille convergente L_1 , de distance focale f'_1 , suivie d'une lentille convergente L_2 , de distance focale image f'_2 , placée à la distance f'_2 de L_1 . À quelle distance du système optique doit se trouver l'image définitive d'un objet placé avant L_1 , à la distance $-4f'_1$?

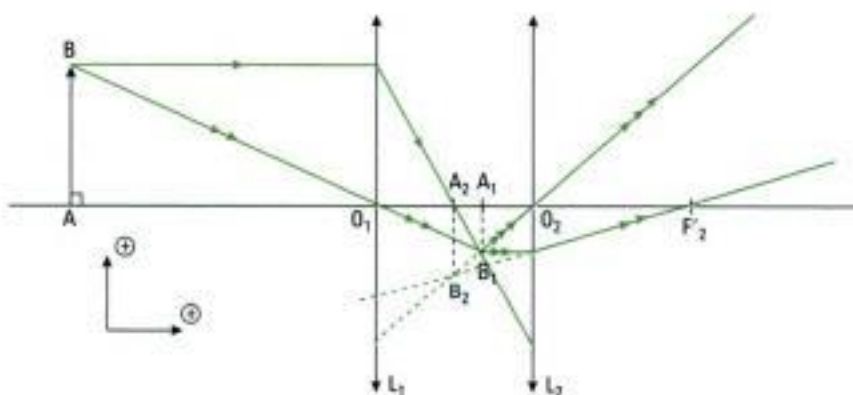
On prendra $f'_1 = \frac{f'_2}{2}$.

Solution

①

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2$$

② La construction géométrique est décrite ci-dessous :



Dans cette construction, on a choisi d'utiliser le point B_1 comme objet virtuel pour L_2 et de chercher son image en utilisant deux rayons particuliers qu'il émet. Les images A_1B_1 et A_2B_2 sont virtuelles.

③ On choisit les relations avec origine au centre car les positions de l'objet et de l'écran sont ici repérées dans l'énoncé par rapport au plan des lentilles :

$$\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f'_1} \quad (1); \quad \frac{1}{O_2A_2} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f'_2} \quad (2)$$

④ $\overline{O_1A} = -4f'_1$ (rappel $f'_1 < 0$) et on cherche à éliminer les données relatives à l'image intermédiaire A_1 (ici $\overline{O_1A_1}$ et $\overline{O_2A_1}$).

⑤ La relation (1) entraîne : $\frac{1}{O_1A_1} = -\frac{1}{4f'_1} + \frac{1}{f'_1} = \frac{3}{4f'_1}$ et donc $\overline{O_1A_1} = \frac{4}{3}f'_1$.

$$\text{Maintenant } \overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -f'_2 + \frac{4}{3}f'_1 = -f'_2 + \frac{2}{3}f'_2 = -\frac{f'_2}{3} \quad (3)$$

et finalement (2) et (3) entraînent : $\frac{1}{O_2A_2} = \frac{1}{f'_2} - \frac{3}{f'_2} = \frac{-2}{f'_2}$, d'où : $\overline{O_2A_2} = \frac{-f'_2}{2}$

Les points A_2 et F'_2 sont donc confondus.

Comment étudier un système formé d'une lentille mince et d'un miroir ? (système catadioptrique)

→ Problème à résoudre

On veut déterminer l'équivalent d'un système optique qui contient une lentille mince L (convergente ou divergente) et un miroir M_1 (sphérique ou plan). Cet équivalent¹ est réalisé par un unique miroir sphérique M_2 .

$$\frac{(L) (M_1)}{\oplus} \rightarrow \frac{(M_2)}{\oplus}$$

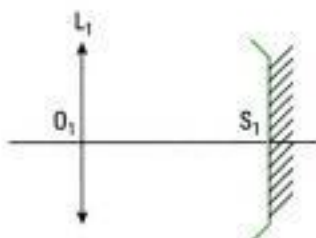
1. Équivalence est à comprendre dans le sens où d'un objet donné, les deux systèmes en donnent la même image.

→ Savoir faire

- ❶ Chercher l'image C' du centre C_1 du miroir M_1 par L . (On pourra se reporter à l'exercice 15 pour l'étude d'un cas particulier).
- ❷ Chercher l'image S' du sommet S_1 du miroir M_1 par L .
- ❸ Conclure sur la nature du miroir équivalent M_2 (plan, concave, convexe) en positionnant C' et S' sur l'axe optique.

→ Application

Trouver le miroir équivalent du système ci-dessous sachant que : $O_1S_1 = 1$ m ; $R_{\text{miroir}} = 1$ m et $f' = 1,5$ m.



Solution

❶ On cherche C' , image par la lentille du centre C_1 du miroir dans le système optique de départ. Ici la recherche de l'image est immédiate puisque C_1 est confondu avec O_1 et C_1 est invariant pour la lentille, ainsi : $C' = C_1$.

❷ On détermine l'image S' de S_1 par la lentille :

Attention au signe dans la relation de conjugaison car l'objet S_1 est à droite de la lentille et envoie des rayons lumineux de la droite vers la gauche. En clair, les foyers de la lentille s'invertissent ce qui conduit à introduire un signe négatif dans le membre de droite de la relation.

$$S_1 \xrightarrow{L_1} S'$$

La relation de conjugaison avec origine au centre de L_1 nous donne :

$$\frac{1}{O_1S'} - \frac{1}{O_1S_1} = -\frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{O_1S'} = \frac{f' \cdot O_1S_1}{f' - O_1S_1}$$

❸ $\overline{O_1S'} = \frac{1,5 \times 1}{1,5 - 1} = 3$ m. Donc : $\overline{C'S'} = \overline{O_1S'} > 0$: le miroir sphérique équivalent est concave.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Constructions d'images

a) Trouver, dans le cadre de l'approximation de Gauss, l'image $A'B'$ d'un objet AB étendu, perpendiculaire à l'axe optique, dans les cas suivants :

1. lentille convergente, AB situé entre le centre optique et le foyer image de la lentille ;
2. lentille divergente, AB situé dans le plan focal objet de la lentille ;
3. lentille divergente de centre optique O , de distance focale objet f avec $f < \overline{OA} < 2f$;
4. lentille divergente de centre optique O , de distance focale objet f avec $2f < \overline{OA} < \infty$;
5. lentille divergente, AB situé à l'infini, virtuel ou réel.

b) Préciser dans chaque cas la nature de l'image et le grandissement transversal de la lentille.

Ex. 2 Formule des opticiens

Comment peut-on obtenir simplement un système optique convergent, de distance focale 10 cm, en partant d'une lentille divergente de distance focale -6 cm ?

Ex. 3 Détermination d'une distance focale

À l'aide d'une lentille convergente, on regarde un objet très éloigné. Le pied de cet objet peut être considéré sur l'axe optique de la lentille. Le sommet de cet objet est vu à l'œil nu sous un angle de 10° . L'image obtenue sur un écran a une hauteur de 8 cm. Quelle est la distance focale de la lentille utilisée ?

Ex. 4 Construction géométrique du foyer de doublet

a) Construire le foyer du système ci-contre.

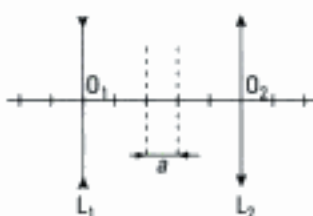
b) Retrouver le résultat par le calcul.



Oral, Mines sup 2001

Ex. 5 Calcul algébrique de la position des foyers d'un doublet

On donne les distances focales pour chacune des deux lentilles représentées ci-contre : $|f'_1| = 3a$ et $|f'_2| = 2a$, avec $a > 0$. Déterminer les foyers du système.



Oral, Mines sup 2001

Ex. 6 Distance entre objet et image

Un objet (AB) et un écran (E) sont fixes et distants de D .

Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille mince convergente de distance focale image f' .

a) Montrer que si $D > 4f'$, il existe deux positions de la lentille convergente distantes de d , pour lesquelles il y a une image nette sur l'écran.

b) Exprimer f' en fonction de D et d .

Oral, Mines sup 1999

Niveau 2

Ex. 7 Doublet afocal

a) Quelle doit être la distance entre deux lentilles dont on connaît les distances focales pour que le système soit afocal ?

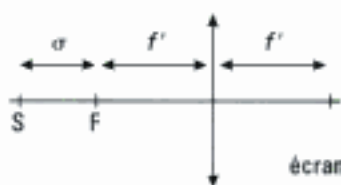
b) On considère un faisceau lumineux cylindrique de section S arrivant sur la première lentille (L_1). Quelle est la section du faisceau arrivant sur la seconde (L_2) ?

c) Si le faisceau arrive sur L_1 avec un angle α , quel sera l'angle de déviation à la sortie de L_2 ?

Oral, CCP option PC 1997

Ex. 8 Montage condenseur

On donne une lentille convergente de distance focale f' . Une source ponctuelle est placée en S , à la distance σ du foyer. On place un écran de l'autre côté de la lentille à distance f' . Calculer la taille de la tache lumineuse sur l'écran.



Oral, Mines sup 1997

Ex. 9 Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée est constituée d'une lentille convergente L_1 de distance focale 50 cm et d'une lentille divergente L_2 de distance focale -5 cm.

a) Préciser la position relative des deux lentilles lorsque la lunette est réglée à l'infini.

b) Calculer le grossissement angulaire de la lunette.

c) De quelle distance doit-on translater l'oculaire pour voir, sans accommoder, un objet situé à 5 mètres en avant de l'objectif ?

Oral, Concours Commun Centrale option MP 1997

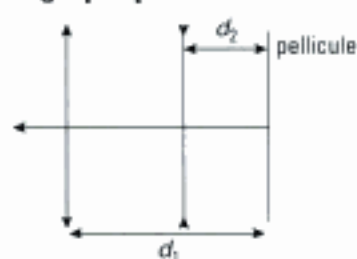
Ex. 10 Étude d'un téléobjectif d'appareil photographique

Un téléobjectif est constitué de deux lentilles minces dont les axes optiques coïncident. La lentille d'entrée L_1 a une vergence $C_1 = 10\delta$ et est suivie d'une lentille L_2 de vergence $C_2 = -40\delta$. La distance O_1O_2 séparant les deux lentilles vaut 8 cm. Un objet AB de hauteur égale à 0,5 m est placé à une distance $d = 100$ m de O_1 sur l'axe optique.

- Déterminer les caractéristiques de l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par L_1 .
- Quel rôle joue cette image pour la seconde lentille ? Déterminer les caractéristiques de l'image définitive $A'B'$.
- Les résultats de la question précédente sont-ils conformes aux propriétés attendues pour l'image donnée par un téléobjectif sur la pellicule photographique ?
- Déterminer la position de la lentille convergente unique qui permettrait d'arriver au même résultat. Préciser sa distance focale.
- Conclure quant à l'intérêt du téléobjectif.

Ex. 11 Appareil photographique

Pour l'appareil photographique ci-contre on donne $f'_1 = 4$ cm, $f'_2 = -6$ cm et $d_1 = 5$ cm.



- Que vaut d_2 pour qu'un point M situé à l'infini donne un point sur le film photo ?
- Tracer deux rayons.
- Si on voit à l'œil nu une image avec un angle de 1° , trouver la dimension de l'image.

Oval, TPE option MP 2001

Ex. 12 Ouverture d'un appareil photographique

Un appareil photographique est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ mm. La pellicule est placée à la distance d de la lentille. Les rayons incidents sont limités par un diaphragme de diamètre D et dont l'ouverture est circulaire.

- On souhaite photographier des objets à une distance variant de $x = 0,6$ m à l'infini par rapport à la lentille. Calculer les distances d_{\min} et d_{\max} de la pellicule pour lesquelles l'image formée est nette.
- On définit un nombre N , appelé nombre d'ouverture, vérifiant $\frac{1}{N} : \frac{D}{f'}$ (appelée ouverture relative).

Sur les objectifs, on peut faire varier le diamètre du diaphragme d'entrée de manière discontinue, ce qui est repéré sur l'objectif par une série de nombres N dont les valeurs sont 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 ; 16. Sur les

boîtiers d'appareils photographiques, on dispose d'autre part des temps d'exposition nécessaires respectifs (en s) : $t_i = \frac{1}{15} ; \frac{1}{30} ; \frac{1}{60} ; \frac{1}{125} ; \frac{1}{250} ; \frac{1}{500}$. Expliquer.

e) La pellicule est caractérisée par un grain $g = 0,02$ mm (taille du grain de l'émulsion de la pellicule). On souhaite que la taille de la tache image d'un objet A reste inférieure à g pour que l'image soit satisfaisante. La mise au point étant faite à l'infini, mettre en évidence à l'aide d'une construction géométrique, la distance minimale L_0 , dite « hyperfocale », qui sépare A de la lentille pour que l'image soit correcte. Exprimer L_0 en fonction de g, f' et N .

d) Soit P_f la profondeur du champ (zone de l'espace objet qui donne une image nette). Qualitativement, comment P_f varie avec N ? avec f' ?

Oval, Centrale option MP 1999

Ex. 13 Introduction au microscope

Un microscope simplifié est constitué de deux lentilles minces convergentes : une lentille d'entrée L_1 (objectif) et une lentille L_2 (oculaire). Leurs distances focales respectives sont $f'_1 = 5$ mm et $f'_2 = 20$ mm. La distance Δ séparant le foyer image de L_1 et le foyer objet de L_2 est appelé intervalle optique.

On prendra ici $\Delta = \overline{F'_1F_2} = 17$ mm.

Le microscope est réglé de manière à limiter la fatigue visuelle de l'utilisateur : l'image $A'B'$ définitive se situe donc à l'infini. L'œil de l'observateur est proche du foyer image de l'oculaire.

- En utilisant les relations de conjugaison déterminer la position de l'objet à observer.
- Faire une construction géométrique soignée pour un objet AB perpendiculaire à l'axe optique et tracer la marche d'un faisceau lumineux issu de B.
- Calculer le grandissement de l'objectif.
- Exprimer l'angle α' sous lequel est vue l'image définitive en fonction de Δ, f'_1, f'_2 et AB.
- L'observation à l'œil nu de l'objet à la distance minimale de vision nette $d_m = 25$ cm est faite sous un angle α . Déterminer le grossissement commercial

$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha}$ du microscope. En déduire la puissance intrinsèque du microscope définie par le rapport $\frac{G_c}{d_m}$.

Niveau 3

Ex. 14 Étude d'un viseur

On se propose d'étudier un système de visée composé de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 . On place en O un réticule situé sur l'axe optique avec $O_1O = D$ et $OO_2 = d$. Un œil normal observe à une distance d'au moins D_m .

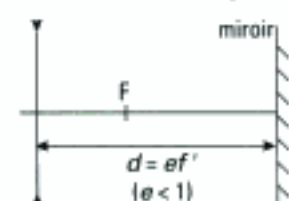
a) Déterminer l'intervalle auquel appartient d lorsqu'un observateur place son œil à une distance a derrière l'oculaire (avec $a < D_m$). Quelle valeur d doit-il prendre pour que l'œil observe sans se fatiguer ?

b) On suppose réalisée la condition précédente. On place sur l'axe optique un objet A à distance x de O. Déterminer l'intervalle auquel doit appartenir D pour que l'image de A et O appartiennent au même plan. En déduire le processus de réglage de ce système.

c) Proposer une méthode expérimentale pour vérifier que l'image de A et O sont dans le même plan.

ESIM option PC 2000

Ex. 15 Miroir équivalent



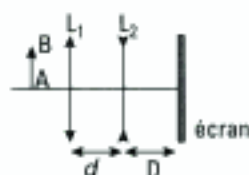
Donner un système équivalent au dispositif ci-contre.

Oral, Saint-Cyr 2000

Ex. 16 Formation d'une image donnée par un doublet sur un écran

À l'infini, l'image de l'objet est nette.

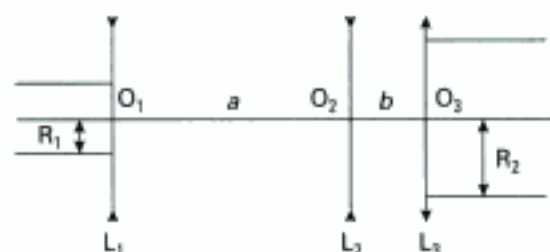
F_1 , F_2 , et d sont donnés. De quelle distance doit-on modifier D pour qu'un objet à 2 m de L_1 soit net sur l'écran ?



Oral, Concours Commun Mines-Ponts option PSI* 1997

Ex. 17 Élargisseur de faisceau à trois lentilles

Dans le dispositif ci-dessous, un faisceau cylindrique de rayon R_1 , de rayons parallèles à l'axe donne en sortie un faisceau cylindrique de rayon R_2 . Donner les valeurs de a et b pour qu'il en soit ainsi.

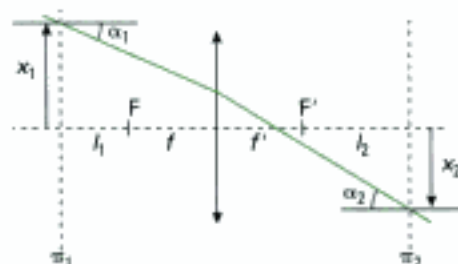


Oral, CCP option PC 2001

Ex. 18 Notation matricielle

Trouver la matrice de passage M vérifiant :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$



Oral, Concours Commun Mines-Ponts option PSI* 1998

Indications

Ex. 6

Repérer la position de la lentille à l'aide d'une variable x puis écrire la relation de conjugaison adéquate.

Ex. 7 et 9

Utiliser la méthode 3. Raisonner à partir de constructions géométriques

Ex. 10

d) L'objet et l'image restent identiques. Déterminer la position et la distance focale de la lentille convergente unique.

Ex. 12

b) La puissance lumineuse reçue est proportionnelle à la section du faisceau lumineux.

c) Effectuer la construction géométrique du cas limite où la taille de la tache image est égale à g .

Ex. 13

Utiliser la méthode 3 puis écrire la relation de conjugaison adéquate.

Ex. 14

b) Utiliser les résultats de l'exercice 6.

Ex. 15

Raisonner à l'aide d'une construction géométrique pour déterminer la position du centre du miroir équivalent.

Ex. 16 et 17

Utiliser la méthode 3.

Ex. 18

Décomposer le trajet du rayon lumineux en trois étapes : de π_1 au plan de la lentille, puis la traversée de la lentille et enfin du plan de la lentille à π_2 .

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1



Voir les méthodes 1 et 2.

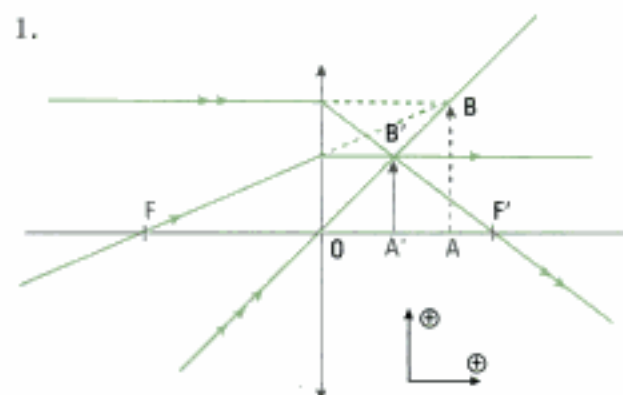


image réelle, droite ($0 < \gamma < 1$)

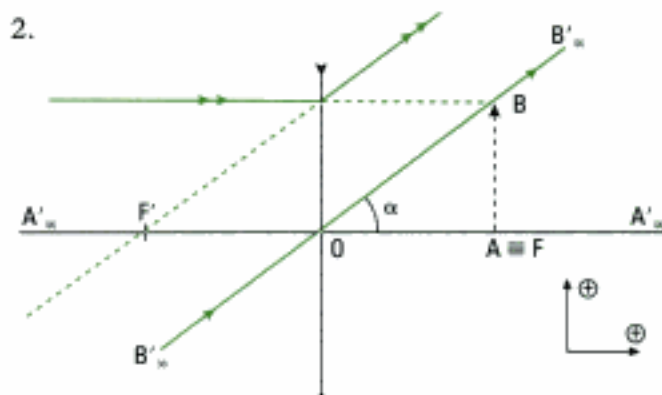


image à l'infini, vue sous un angle $\alpha = \frac{AB}{f}$
(le grandissement n'est pas défini)

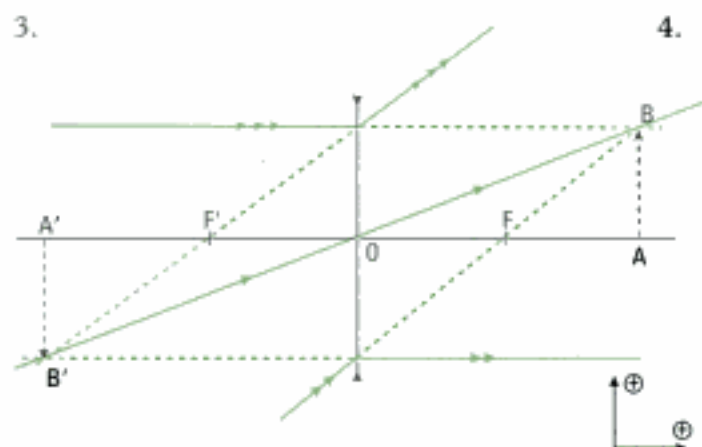


image virtuelle, renversée, plus grande
($-\infty < \gamma < -1$)

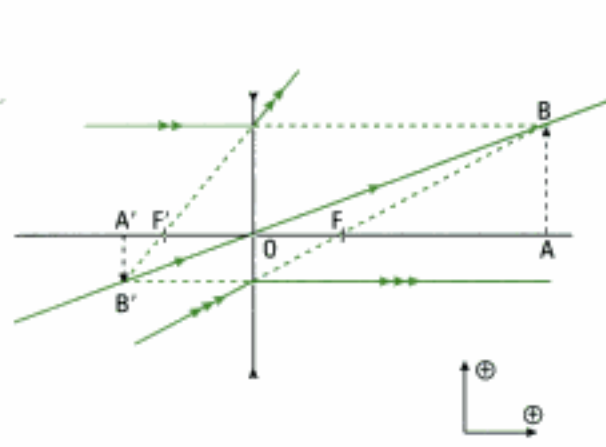


image virtuelle, renversée, plus petite
($-1 < \gamma < 0$)

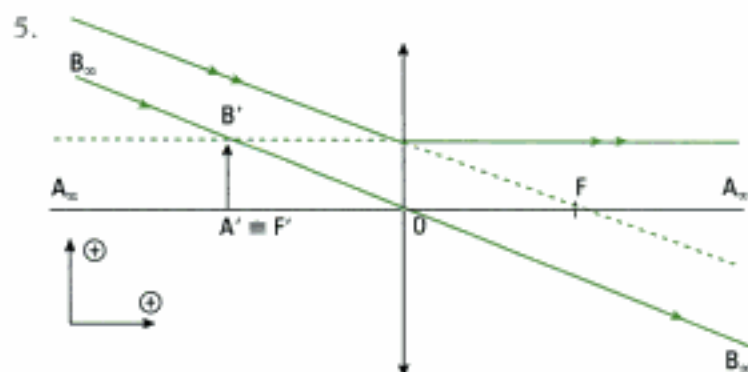


image virtuelle dans le plan focal image
(le grandissement n'est pas défini car l'objet est à l'infini)

Exercice 2

On accole une lentille convergente à la lentille divergente ainsi :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_{div}} + \frac{1}{f'_{conv}} \Leftrightarrow \frac{f' \times f'_{div}}{f'_{div} - f'} = f'_{conv}$$

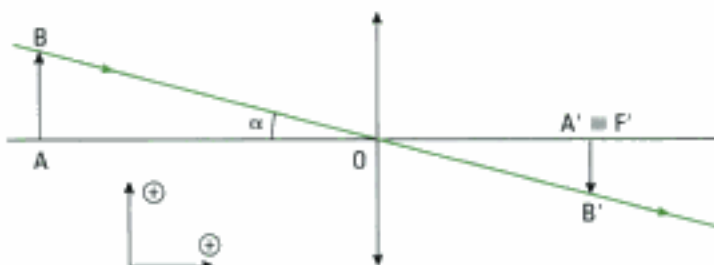
$$A.N. : f'_{conv} = \frac{10 \times (-6)}{-6 - 10} = 3,7 \text{ cm.}$$

Exercice 3

L'objet très éloigné peut être considéré à l'infini, son image est alors dans le plan focal image (méthode 1) :

$$\tan \alpha = \frac{A'B'}{f'} \Leftrightarrow f' = \frac{A'B'}{\tan \alpha}$$

$$A.N. : f' = \frac{8}{\tan 10} \approx 45,4 \text{ cm}$$

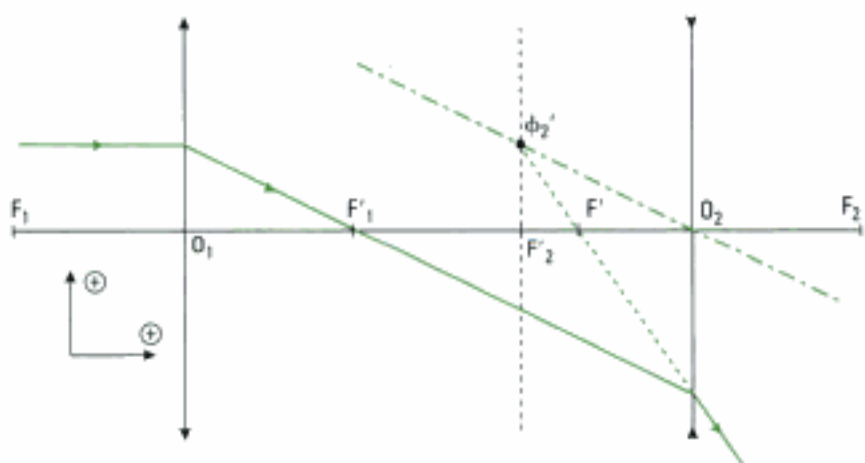


Exercice 4

a) Construction géométrique (méthode 3).

La figure de l'énoncé donne $\overline{O_2O_1} = -3$, $\overline{O_1F'_1} = 1$ (unités arbitraires issues de la figure de l'énoncé).

La construction du rayon transmis permet de trouver le foyer image F' cherché.



b) Vérification par le calcul :

$$A_{\infty} \xrightarrow{L_1} A_1 = F'_1 \xrightarrow{L_2} A_2 = F' \text{ (méthode 3)}$$

avec : $\frac{1}{O_2F'} - \frac{1}{O_2F'_1} = \frac{1}{f'_2}$ et $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -3 + 1 = -2$

$$\text{ainsi avec } f'_2 = -1 : \frac{1}{O_2F'} = -1 - \frac{1}{-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2F'} = -\frac{2}{3}} \text{ (unité arbitraire).}$$

Exercice 5

a) Position du foyer image F' :

$$A_{\infty} \xrightarrow{L_1} A_1 = F'_1 \xrightarrow{L_2} A_2 = F' \text{ (méthode 3)}$$

avec : $\frac{1}{O_2F'} - \frac{1}{O_2F'_1} = \frac{1}{f'_2}$ et $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -5a - 3a = -8a$ ($f'_1 = -3a$).

$$\text{sachant que } f'_2 = 2a : \frac{1}{O_2F'} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{-8a} = \frac{3}{8a} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2F'} = \frac{8a}{3}}$$

Hidden page

• 2^e cas : L_1 convergente et L_2 divergente.

$\overline{O_1F'_1} > 0$ et $\overline{F_2O_2} < 0$; (1) est donc possible si $f'_1 + f'_2 \geq 0 \Leftrightarrow f'_1 \geq -f'_2$.

• 3^e cas : L_2 convergente et L_1 divergente.

Analogue au cas précédent.

• 4^e cas : L_1 et L_2 divergentes.

$\overline{O_1F'_1} < 0$ et $\overline{F_2O_2} < 0$; Il est donc impossible de vérifier (1).

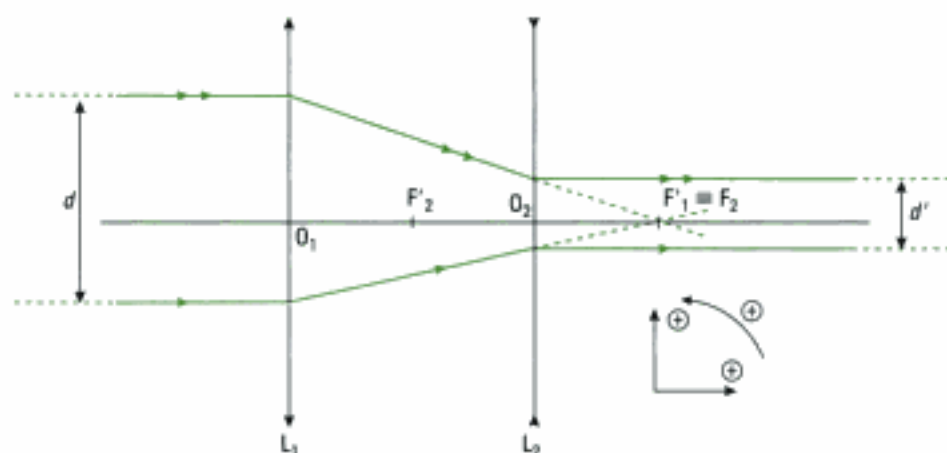
Conclusion : les trois premiers cas, sous certaines conditions, permettent de réaliser un système optique afocal ; dans ce cas la distance entre les deux lentilles est : $\boxed{O_1O_2 = |f'_1 + f'_2|}$.

b) Section S' du faisceau arrivant sur L_2 :

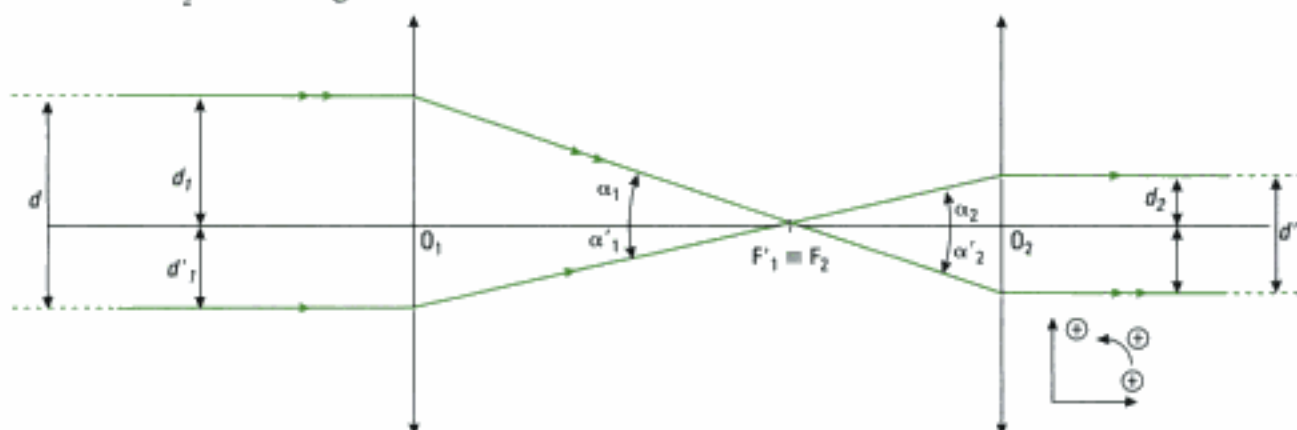
La lecture complète de l'exercice suggère qu'ici le faisceau incident est parallèle à l'axe optique (on envisagera une inclinaison à la troisième question). À priori, le faisceau incident n'est pas nécessairement centré sur l'axe optique.

• Construction géométrique du faisceau transmis : l'énoncé ne précise pas la nature des lentilles. Il faut avoir l'initiative d'envisager différents cas lors d'un oral.

1^{er} cas : si L_2 est divergente (méthodes 1 et 2).



2^e cas : si L_2 est convergente.



• Détermination géométrique de S'

1^{er} cas : $d = d_1 + d_2$, avec $d_1 = f'_1 \cdot \tan(-\alpha_1) \approx -f'_1 \alpha_1$ et donc $d_1 = f'_1(\alpha_2 - \alpha_1)$.

De même : $d_2 = f'_2(\alpha_2 - \alpha_1)$.

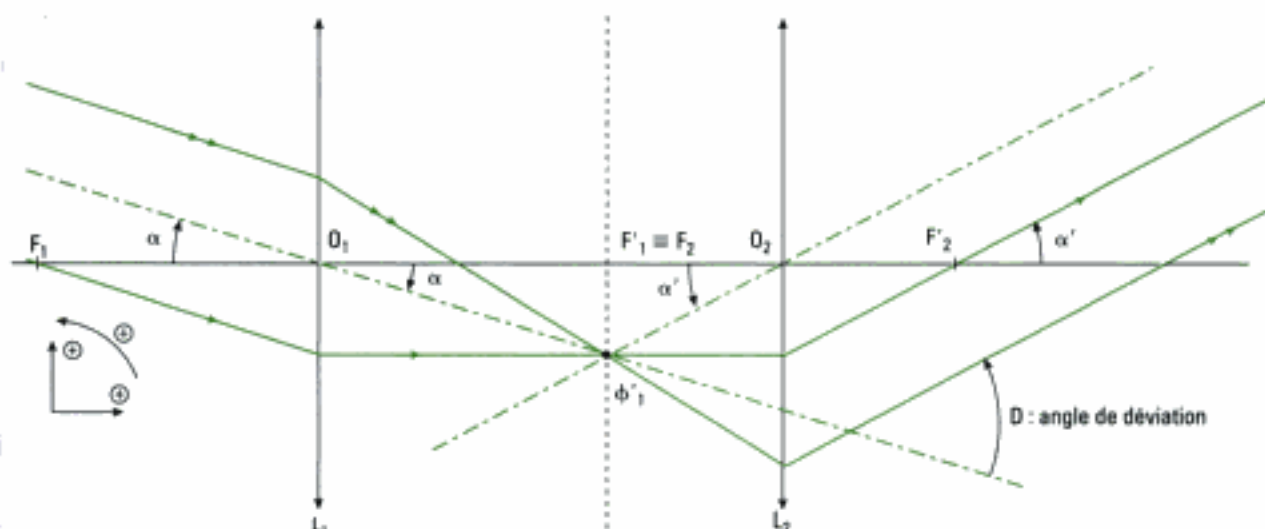
On obtient ainsi :

$$\frac{d'}{d} = \frac{f'_2}{f'_1} \text{ et donc } \frac{S'}{S} = \frac{\pi d'^2}{\pi d^2} = \left(\frac{f'_2}{f'_1}\right)^2.$$

2^e cas : on obtient le même résultat (il ne dépend pas de la nature des lentilles).

c) Le faisceau incident est incliné d'un angle α sur l'axe optique :

- Construction géométrique du faisceau transmis (méthodes 1 et 2).



- Détermination géométrique de l'angle de déviation :

$$\tan \alpha = \frac{F_1' \Phi_1'}{O_1 F_1'} ; \tan \alpha' = \frac{F_2' \Phi_2'}{O_2 F_2'} \text{ et } \tan \alpha = \alpha, \tan \alpha' = \alpha'$$

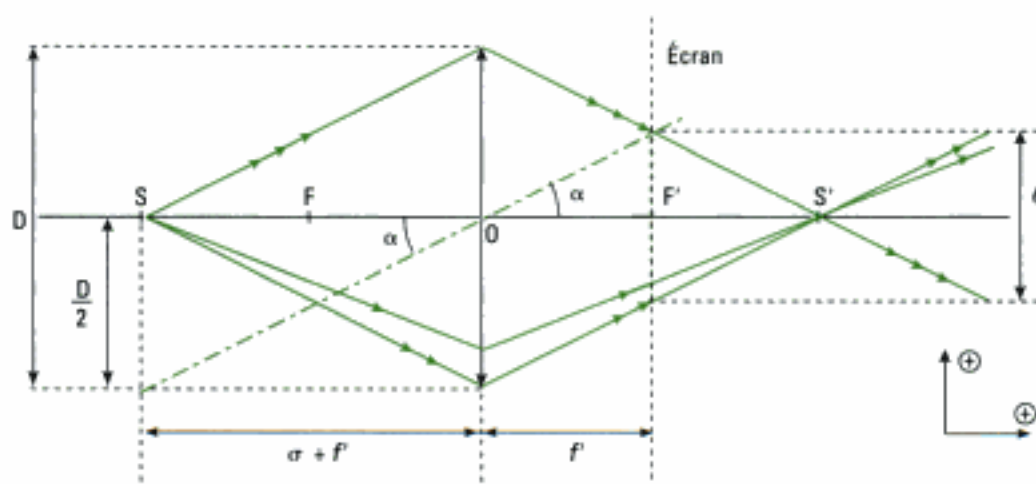
$$\text{d'où : } \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2} \Rightarrow D = \alpha' - \alpha = -\alpha \cdot \frac{f_1'}{f_2} - \alpha = \boxed{-\alpha \cdot \left(1 + \frac{f_1'}{f_2}\right)}$$

Commentaires :

- ici $\alpha < 0$ donc $D > 0$ ce qui est effectivement cohérent avec l'algébrisation des angles.
- l'image est renversée ; aussi ce système ne saurait être utilisé comme lunette d'observation terrestre (il faudrait pour cela que l'image soit droite).

Exercice 8

- Construction géométrique de l'image S' de la source S :



La zone tramée représente la tache lumineuse sur l'écran de taille ℓ . Il faut introduire le diamètre D de la lentille.

- Détermination de ℓ :

En supposant que la lentille est symétrique de part et d'autre de l'axe optique :

$$\frac{\ell}{2} = f' \cdot \tan \alpha \text{ et } \tan \alpha = \frac{D/2}{(\sigma + f')}$$

$$\text{d'où } \ell = \frac{D \cdot f'}{\sigma + f'}$$

Test : si S est placée en F alors $\sigma = O$ et $\ell = D$ ce qui signifie que le faisceau émergent ressort parallèle à l'axe optique comme il se doit.

Commentaire : en règle générale, une lentille est utilisée dans les conditions de Gauss mais ici cela est peu probable surtout si D est grand. En pratique, on rencontre ce type de situation lorsque la lentille condense la lumière au voisinage du centre optique d'une seconde lentille utilisée, elle, dans les conditions de Gauss.

Exercice 9

a) Le cas d'une lunette réglée à l'infini a déjà été rencontré dans l'exercice 7 : le doublet doit être afocal. Ainsi l'image d'un objet situé à l'infini se forme elle aussi à l'infini.

En effet : $A_{\infty} \xrightarrow{L_1} A_1 \equiv F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_{\infty}$

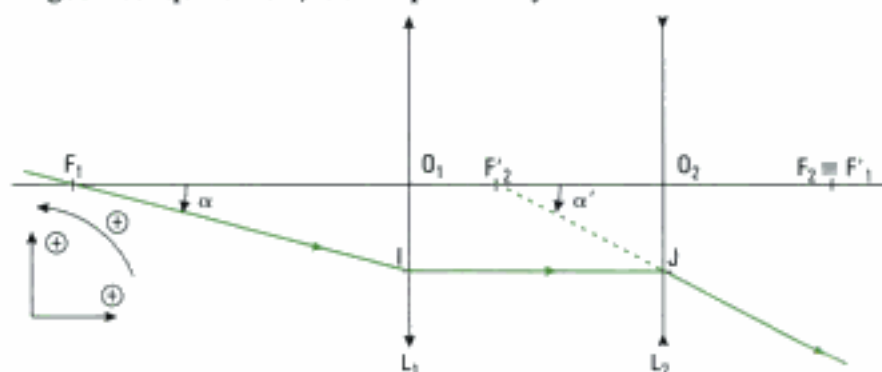
Il vient immédiatement : $\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F_2 O_2} = f'_1 + f_2$

A.N. : $\overline{O_1 O_2} = 50 - 5 = 45 \text{ cm}$.



Voir la méthode 3.

b) Construction géométrique du trajet suivi par un rayon lumineux :



Le grossissement angulaire G est défini par : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

• Détermination géométrique du grossissement angulaire :

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{\overline{O_1 I}}{F_1 O_1} ; \alpha' = \tan \alpha' = \frac{\overline{O_2 J}}{F'_2 O_2} ; \overline{O_1 I} = \overline{O_2 J}$$

$$\text{et donc : } G = \frac{\overline{O_2 J}}{F'_2 O_2} \cdot \frac{F_1 O_1}{\overline{O_1 I}} = \frac{\overline{F_1 O_1}}{F'_2 O_2} = - \frac{f'_1}{f_2}$$



La tangente d'un angle est une grandeur algébrique.

Commentaire : le grossissement angulaire est positif, il peut donc s'agir d'une lunette d'observation terrestre.

c) On a désormais (méthode 3) : $A \xrightarrow{L_1} A_1 \equiv F_1 \xrightarrow{L_2} A'_{\infty}$

Ici il est plus judicieux d'utiliser la relation de Newton pour L_1 afin de déterminer la nouvelle position de L_2 . En effet, $\overline{F'_1 F_2}$ indiquera la translation cherchée puisqu'au départ F'_1 est en F_2 .

$$\text{Ainsi : } \overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 F_2} = -f_1^2 \Leftrightarrow \overline{F'_1 F_2} = - \frac{f_1^2}{\overline{F_1 A}}$$

A.N. : $\overline{F'_1 F_2} \approx 5,6 \text{ cm}$.

Il faut éloigner l'oculaire d'environ 5,6 cm de l'objectif.

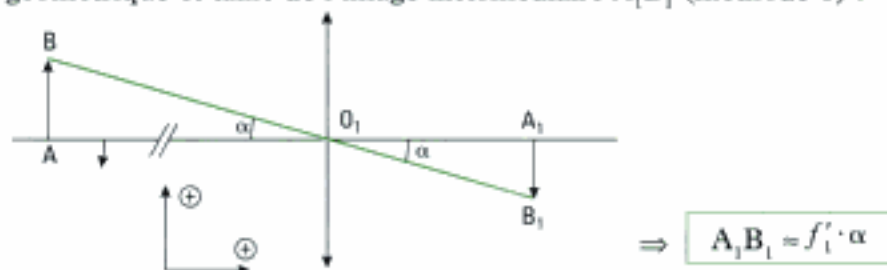
Exercice 10

a) • Analyse qualitative de l'énoncé :

L'objet A étant placé à 100 m avant L_1 , la relation de Descartes montre immédiatement que son image A_1 est, à peu de chose près, dans le plan focal image de L_1 :

$$\overline{O_1A_1} \approx f'_1 = 0,1 \text{ m}$$

• Construction géométrique et taille de l'image intermédiaire A_1B_1 (méthode 1) :



$$A.N. : \overline{A_1B_1} = \frac{0,5}{100} \times 0,1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

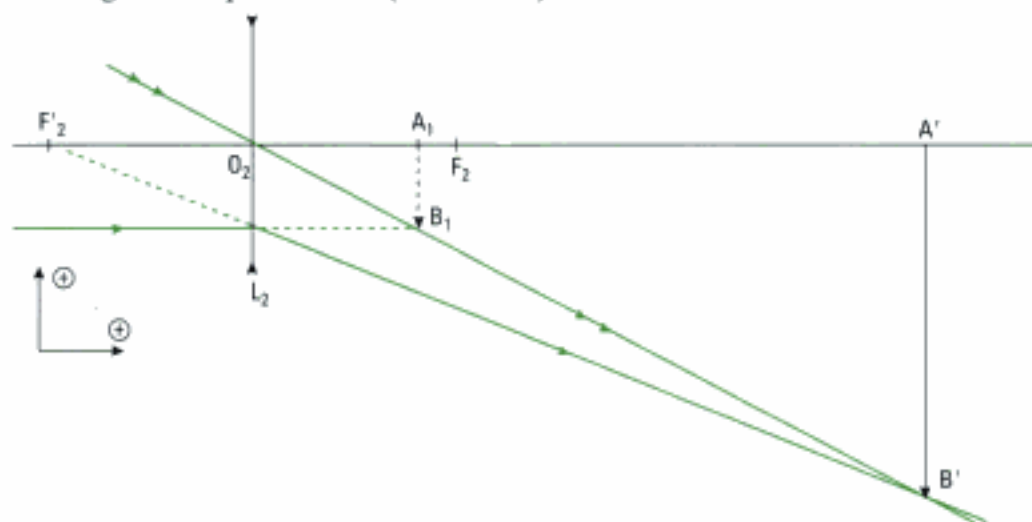
Commentaire : la taille de $\overline{A_1B_1}$ étant petite, il est nécessaire d'utiliser une seconde lentille pour grossir cette image.

b) Rôle joué par l'image intermédiaire pour L_2 :

Étant donné que $\overline{O_1A_1} > \overline{O_1O_2}$, A_1B_1 est un objet virtuel pour L_2 .

Caractéristiques de l'image définitive $A'B'$:

• Construction géométrique de $A'B'$ (méthode 1) :



• Position et taille de l'image définitive :

$$A' \text{ est l'image de } A_1 \text{ à travers } L_2 \text{ donc : } \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \text{ soit } \overline{O_2A'} = \frac{f'_2 \cdot \overline{O_2A_1}}{\overline{O_2A_1} + f'_2}$$

$$A.N. : \overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -8 + 10 = 2 \text{ cm} ; f'_2 = -\frac{1}{40} \text{ m} = -2,5 \text{ cm} \text{ et } \overline{O_2A'} = 10 \text{ cm.}$$

$$D'autre part, A'B' = \gamma_2 \cdot \overline{A_1B_1} = \left(\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \right) \cdot \overline{A_1B_1}$$

$$A.N. : A'B' = -0,25 \text{ cm.}$$

c) L'image définitive est réelle comme il se doit pour être formée sur la pellicule photographique. En revanche, elle ne mesure qu'un dixième de la plus petite dimension d'une pellicule type $24 \times 36 \text{ mm}$ ce qui est un peu petit.

d) La distance objet-image doit rester constante et le grandissement de l'unique lentille doit être égal à celui du téléobjectif, donc :

$$\begin{cases} \overline{AA'} = \overline{AO_2} + \overline{O_2A'} = 100 + 0,1 = 100,1 \text{ m} \\ \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{-0,25 \cdot 10^{-2}}{0,5} = -0,5 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AO} + \overline{OA'} = 100,1 \\ \overline{OA'} = \gamma \cdot \overline{OA} = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot \overline{OA} \end{cases}$$

$$\text{donc : } \overline{OA} \cdot (\gamma - 1) = 100,1 \Rightarrow \overline{OA} = -99,6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \overline{OA'} = -0,5 \cdot 10^{-2} \times (-99,6) = 0,498 \text{ m} = 49,8 \text{ cm}$$

$$\text{et } f' = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = \frac{-99,6 \times 0,498}{-99,6 - 0,498} = 0,495 \text{ m} = 49,5 \text{ cm.}$$

e) Dans les deux cas, l'objet peut être considéré à l'infini.

Ainsi pour l'unique lentille, l'image se forme dans son plan focal image ; la distance $OF' = 49,5 \text{ cm}$ représente l'encombrement du dispositif de formation de l'image que l'on peut comparer à $O_1A' = O_1O_2 + O_2A' = 18 \text{ cm}$. **Le téléobjectif a un encombrement environ 2,8 fois plus petit.**

Exercice 11

a) Valeur de d_2 si l'objet ponctuel M est à l'infini :

$$M_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 = F'_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

L'inconnue à déterminer étant $O_2A' = d_2$, l'idée est d'écrire la relation de Descartes pour L_2 :

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f'_2} \quad (1)$$

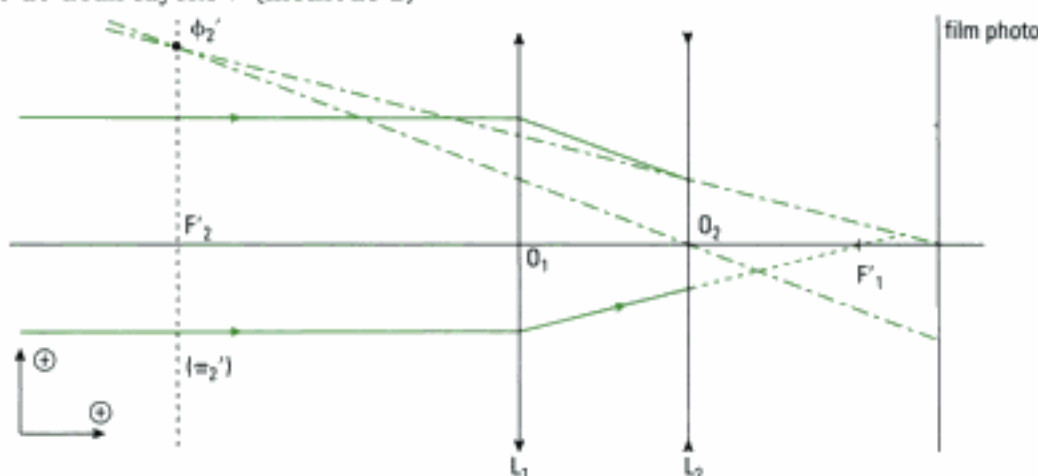
$$\text{avec : } \overline{O_2A'} = d_2 ; \overline{O_2A_1} = \overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -(d_1 - d_2) + f'_1 \quad (1)$$

En substituant dans (1), après calcul on obtient :

$$d_2^2 + d_2(-d_1 + f'_1) + d_1f'_2 - f'_1f'_2 = 0$$

$$A.N. : d_2^2 - d_2 - 6 = 0 \text{ donne une racine positive } \boxed{d_2 = 3 \text{ cm}}$$

b) Tracé de deux rayons : (méthode 2)



Commentaire : on a pris M à l'infini sur l'axe, ce qui est cohérent avec la situation physique étudiée.

Conseil : contrôler que le faisceau émergent de L_2 est divergent.

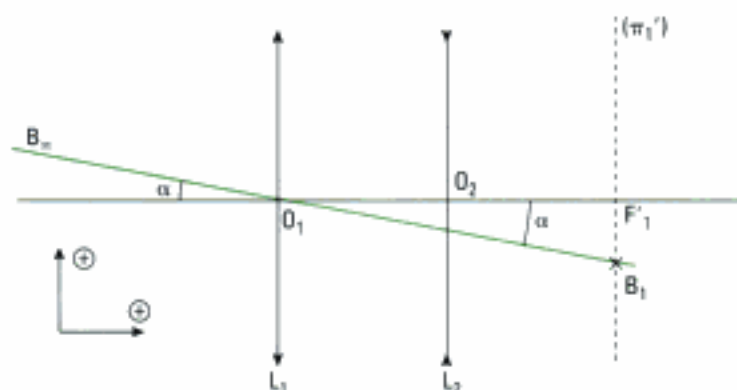
c) Image vue à l'œil nu sous un angle de 1° (méthode 1)

• Étude de l'image intermédiaire :

L'objet est ici à l'infini, incliné sur l'axe. On commence par déterminer la taille de l'image intermédiaire F'_1B_1 située dans le plan focal image de L_1 .

$$B_\infty \xrightarrow{L_1} B_1 \xrightarrow{L_2} B'$$

$$\text{avec : } \overline{F'_1B_1} = -f'_1 \cdot \tan \alpha = -f'_1 \cdot \alpha$$



• Grandeurs de l'image définitive :

Lorsqu'il s'agit de déterminer la taille d'une image, il faut utiliser le grandissement transversal notamment lorsque plusieurs lentilles sont associées.

$$\gamma_{L_2} = \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A}} = \frac{d_2}{\overline{O_2 F'_1}} = \frac{d_2}{f'_1 - (d_1 - d_2)} \text{ d'après (1) et aussi } \gamma_{L_2} = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{F'_1 B_1}}$$

A.N. : $A'B' = -1,05 \text{ mm}$ (image renversée) avec α en radian.

Exercice 12

a) Les positions de l'objet et de la pellicule sont repérées par rapport au plan de la lentille, on utilise donc la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \overline{OA'} = \frac{f' \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} + f'}$$

A.N. : pour $\overline{OA} = -x = -60 \text{ cm}$, $\overline{OA'} = d_{\max} = 54,5 \text{ mm}$

pour $\overline{OA} \rightarrow -\infty$, $\overline{OA'} = \overline{OF'} = d_{\min} = 50 \text{ mm}$

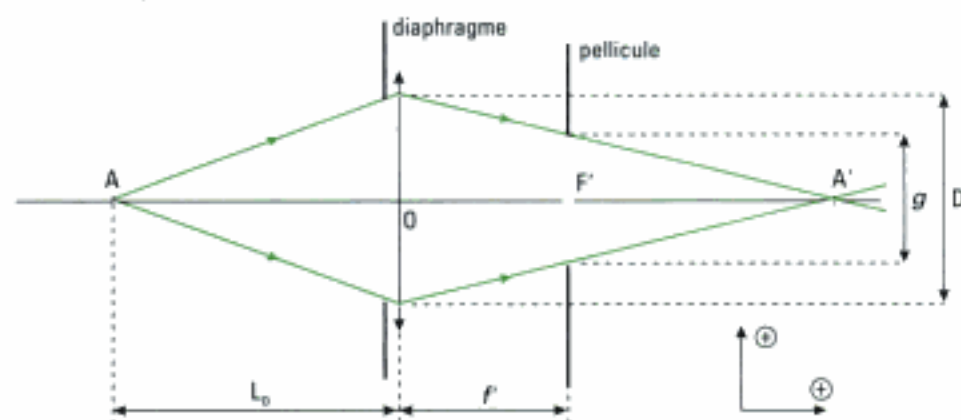
b) Pour que le développement du film photo soit satisfaisant, l'énergie lumineuse \mathcal{E} reçue par celui-ci doit être maintenue constante quel que soit le temps d'exposition t_e sélectionné ; la puissance lumineuse \mathcal{P} étant proportionnelle à la surface d'ouverture, de diamètre D , on a :

$$\mathcal{P} = k \cdot \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \mathcal{E} = k \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot t_e \text{ (où } k \text{ est une constante de proportionnalité)}$$

or : $\frac{1}{N} = \frac{D}{f'}$, donc : $\frac{4\mathcal{E}}{k\pi D^2} = \frac{t_e}{N} = \text{constante.}$

Si on remarque que la suite des valeurs de N proposées correspond à une progression géométrique de raison $\sqrt{2}$ (ex : $16 = 11 \times \sqrt{2}$), on voit qu'il faut réduire de moitié t_e lorsque la valeur de N est diminuée d'une valeur de diaphragme. Ainsi le réglage $(11, \frac{1}{250})$ est équivalent au choix $(16, \frac{1}{125})$ à 6% près.

c) Il faut effectuer la construction graphique dans le cas limite où la taille de la tache image est juste égale à g . L'appareil étant réglé à l'infini, la pellicule se situe dans le plan focal image de la lentille. L_0 est la distance minimale d'approche de l'objet A de la lentille.



Tache image de A sur la pellicule.

• Détermination de L_0 :

Le théorème de Thalès donne $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA'} - f'} = \frac{D}{g}$ avec $\overline{OA'} > f' > 0$.

$$\text{Or } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot f'}{\overline{OA} + f'} = \frac{-L_0 \cdot f'}{-L_0 + f'}$$

sachant que $\frac{D}{f'} = \frac{1}{N}$ il vient après simplification :
$$L_0 = \frac{f'^2}{g \cdot N}$$

d) • Mise en évidence de la profondeur de champ P_f :

La figure précédente permet rapidement de déterminer P_f dans le cas présent. Si l'objet A s'éloigne de la lentille, la tache diminue de diamètre ; ainsi tous les objets situés à une distance de la lentille au moins égale à L_0 , donneront une image nette sur la pellicule.

• Variation de P_f avec N ou f' :

Si N augmente alors L_0 diminue et on augmente la profondeur de champ. Inversement, si f' augmente P_f diminue.

Exercice 13

a) $A \xrightarrow{L_1} A_1 \equiv F_2 \xrightarrow{L_2} A'_2$

L'image intermédiaire A_1 étant confondue avec F_2 et l'énoncé donnant la valeur de $\overline{F'_1 A_1}$, on applique la relation de Newton pour L_1 :

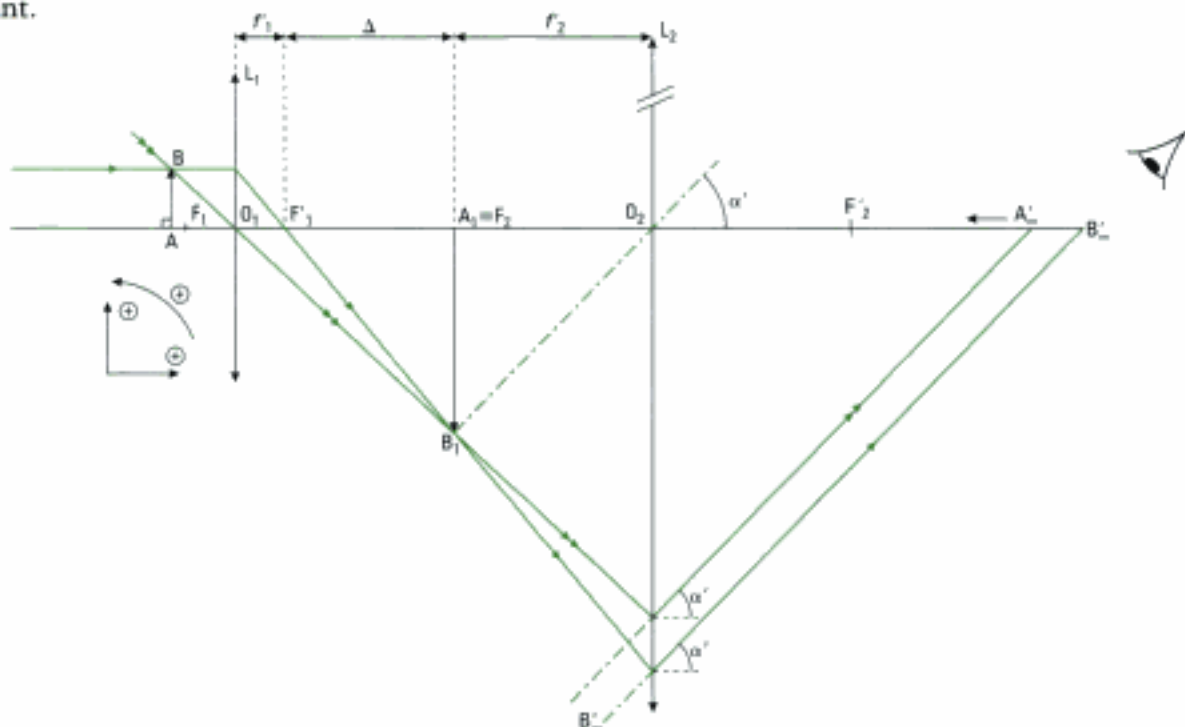
$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 F_2} = -f_1'^2 \text{ avec } \overline{F'_1 F_2} = \Delta$$

d'où :
$$\overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$$

A.N. : $\overline{F_1 A} = -0,147 \text{ mm}$.

Commentaire : l'objet est pratiquement situé au foyer objet de l'objectif et même très proche de celui-ci ($f'_1 = 5 \text{ mm}$). Un utilisateur peu vigilant peut casser la lamelle support lors de sa mise au point.

b)



Voir les méthodes 1 et 2.

Commentaire : il n'est pas gênant d'avoir une image renversée avec cet instrument d'optique.

$$c) \gamma_{L_1} = \frac{f'_1}{F_1 A} = \frac{f'_1}{-f_2'/\Delta} = -\frac{\Delta}{f'_1}$$

$$A.N. : \gamma_{L_1} = -\frac{170}{5} = -34.$$

$$d) \alpha' = \tan \alpha' = \frac{A_1 B_1}{f'_2} \quad (\alpha' > 0) \text{ avec } A_1 B_1 = |\gamma_{L_1}| \cdot AB$$

$$\text{et } |\gamma_{L_1}| = \frac{\Delta}{f'_1}, \text{ d'où : } \alpha' = \frac{\Delta \cdot AB}{f'_1 f'_2}$$

Commentaire : l'approximation $\alpha' = \tan \alpha'$ est acceptable si $\alpha' < 10^\circ = 0,17$ radian ce qui permet de montrer que l'objet doit être de dimension $AB < 0,17 \times \frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = 0,1$ mm.

e) • Grossissement commercial :

$$G_C = \frac{\alpha'}{\alpha} \text{ avec } \alpha = \tan \alpha = \frac{AB}{d_w} \Rightarrow G_C = \frac{\Delta \cdot d_w}{f'_1 f'_2} \quad A.N. : G_C = 425.$$

• Puissance intrinsèque :

$$P_i = \frac{G_C}{d_w} \quad A.N. : P_i = 1\,700 \text{ m}^{-1}.$$

Exercice 14

a) • Intervalle auquel doit appartenir d :

Il faut partir de l'hypothèse que l'image O'' donnée par la lentille L_2 du réticule se situe au moins à D_w de l'œil supposé placé en O' :

$$O \xrightarrow{L_1} O'' \text{ avec } : D_w < \overline{O''O'} < \infty$$

$$\text{Or : } \overline{O''O'} = \overline{O''O_2} + \overline{O_2O'} \text{ avec } \frac{1}{O_2O''} - \frac{1}{O_2O} = \frac{1}{f'_2} \Leftrightarrow \overline{O_2O''} = \frac{-f'_2 \cdot d}{f'_2 - d}$$

$$\text{donc : } \overline{O''O'} = \frac{f'_2 \cdot d}{f'_2 - d} + \overline{O_2O'} = \frac{f'_2 \cdot d}{f'_2 - d} + a \Leftrightarrow d = \frac{f'_2 \cdot (\overline{O''O'} - a)}{\overline{O''O'} - a + f'_2} \quad (1)$$

avec : $\lim_{\overline{O''O'} \rightarrow +\infty} d(\overline{O''O'}) = f'_2$; $\lim_{\overline{O''O'} \rightarrow D_w} d(\overline{O''O'}) = \frac{f'_2 \cdot (D_w - a)}{D_w - a + f'_2} (< f'_2 \text{ car } d \text{ est une fonction croissante de } \overline{O''O'})$.

$$\text{Finalement : } \frac{f'_2(D_w - a)}{D_w - a + f'_2} < d < f'_2$$

• Pour que l'œil observe sans se fatiguer : l'image O'' doit être située à l'infini pour l'œil :

$$\overline{O''O'} \rightarrow +\infty \Rightarrow d \rightarrow f'_2 \text{ d'après (1)}$$

Conclusion : le réticule est alors placé au foyer objet de L_2 .

b) • Intervalle auquel doit appartenir D pour que A et O appartiennent au même plan :

Déterminer l'intervalle des valeurs possibles de $D = O_1O$ c'est aussi s'intéresser au domaine de variation de la distance $x = OA$ introduite par l'énoncé car ces deux paramètres sont liés par la relation de conjugaison de L_1 .

x est la distance séparant l'objet A de son image A_1 donnée par L_1 qui doit être au moins égale à 4 fois la distance focale image f'_1 de L_1 (voir exercice 6) $\Rightarrow x \geq 4f'_1$.

De plus, l'objet peut être situé à l'infini et $x \rightarrow \infty$, d'où : $4f'_1 \leq x < \infty$

Si $x = OA = 4f'_1$ alors $O_1A = 2f'_1$.

Si $x \rightarrow +\infty$, alors A_1 est située en $F'_1 \Rightarrow O_1O \rightarrow O_1F'_1 = f'_1$

finalement : $f'_1 \leq D \leq 2f'_1$.

• Processus de réglage de ce système :

(La bonne compréhension de la réponse donnée ci-dessous à cette question suppose une connaissance préalable de ce dispositif)

- régler l'oculaire de façon à voir le réticule net sans accommodation de l'œil ;
- pointer le viseur sur l'objet A et régler le tirage de l'objectif pour obtenir une image de A nette sur le réticule observé à l'aide de l'oculaire ;
- bloquer le tirage précédemment obtenu, le viseur est prêt à fonctionner.

c) Si l'œil accommode, l'observateur peut à tort croire que l'image de A et le réticule sont situés dans le même plan. Si O et l'image de A sont dans un même plan, en déplaçant son œil latéralement, l'observateur ne doit pas voir les deux images se déplacer l'une par rapport à l'autre.

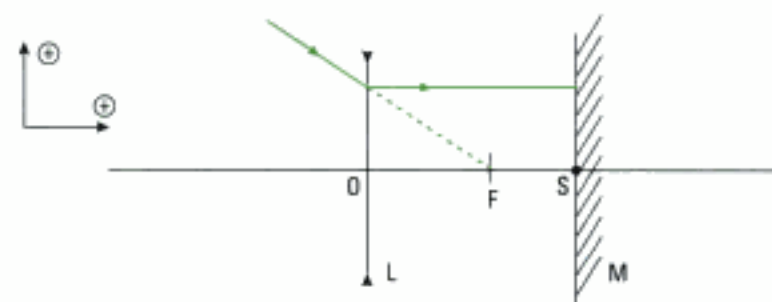
Exercice 15

• Analyse qualitative préalable :

La distance étant positive, il faut : $e < 0$, S désigne le sommet du miroir.

• Détermination du centre C' du miroir sphérique équivalent :

Il est possible de déterminer rapidement C' à l'aide du raisonnement suivant : tout rayon incident passant par C' doit revenir sur lui-même (propriété du centre d'un miroir sphérique). Aussi, ceci n'est possible qu'à condition d'avoir l'émergent de la lentille perpendiculaire au plan du miroir :



La méthode 2 permet de déduire que nécessairement l'incident correspondant passe virtuellement par le foyer objet de L.

Puisque C' doit nécessairement être situé sur l'axe optique on en déduit que $C' \equiv F$.

• Détermination du sommet S' du miroir sphérique équivalent (méthode 4).

S' est l'image de S à travers L telle que $\frac{1}{OS'} - \frac{1}{OS} = -\frac{1}{f'}$ soit après simplification :

$$\overline{OS'} = \frac{e}{1-e} \cdot f'$$

• Conclusion sur la nature du miroir sphérique équivalent :

Remarquons que $\frac{e}{1-e} = -1 + \frac{1}{1-e} > -1 \Rightarrow \overline{OS'} > -f' = \overline{OC'}$

Le sommet S' du miroir équivalent est donc situé à droite du centre C' : **le miroir sphérique équivalent est donc concave.**

Exercice 16

• Étude qualitative préalable :

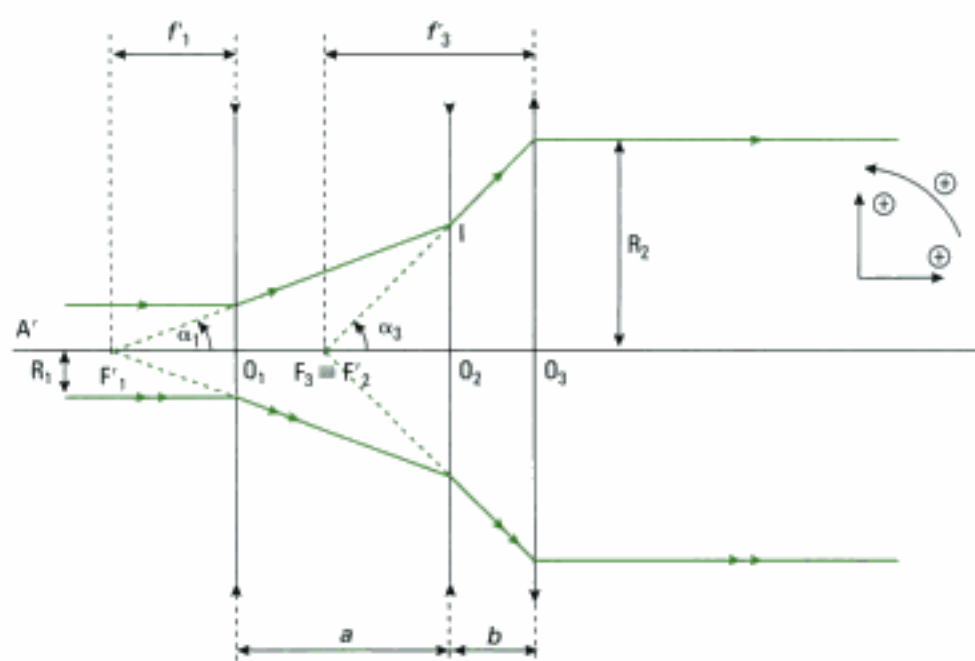
$$A \xrightarrow{l_1} A_1 \xrightarrow{l_2} A'$$

Lorsque les positions des lentilles sont fixées, l'écran ne peut pas être placé n'importe où car l'image définitive doit ici être réelle puisque reçue sur un écran :

Hidden page

• Construction géométrique (méthode 3):

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \equiv F'_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \equiv F_3 \xrightarrow{L_3} A'_\infty$$



• Mise en équation et résolution :

Il faut trouver deux équations portant sur les deux inconnues a et b .

– relation de conjugaison pour L_2 ; $F'_1 \xrightarrow{L_2} F_3 \Rightarrow \frac{1}{O_2F_3} - \frac{1}{O_2F'_1} = \frac{1}{f'_2}$

avec : $\overline{O_2F_3} = \overline{O_2O_3} + \overline{O_3F_3} = b - f'_3$; $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -a + f'_1$

donc : $\frac{1}{b - f'_3} - \frac{1}{f'_1 - a} = \frac{1}{f'_2}$ (1)

– utilisation de la géométrie :

$O_2I = (a - f'_1) \cdot \tan \alpha_1 = (f'_3 - b) \cdot \tan \alpha_3$

avec $\tan \alpha_1 = -\frac{R_1}{f'_1}$; $\tan \alpha_3 = \frac{R_2}{f'_3}$

$\Rightarrow R_1 \cdot \left(\frac{f'_1 - a}{f'_1} \right) = \left(\frac{f'_3 - b}{f'_3} \right) \cdot R_2$ (2)

– résolution du système des équations (1) et (2) :

(1) $\Rightarrow b = f'_3 + \frac{f'_2 \cdot (f'_1 - a)}{f'_1 + f'_2 - a}$

(2) $\Rightarrow b = f'_3 + f'_3 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \left(\frac{a}{f'_1} - 1 \right)$ (3)

donc : $\frac{f'_2 \cdot (f'_1 - a)}{f'_1 + f'_2 - a} = f'_3 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \left(\frac{a}{f'_1} - 1 \right)$

f'_1 étant nécessairement différent de a (car $a > 0$ et $f'_1 < 0$), on extrait la solution :

$$a = f'_1 + f'_2 + \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad (4)$$

Enfin de (3) et (4) on déduit, après simplification : $b = f'_3 + f'_2 + \frac{f'_2 \cdot f'_3}{f'_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$

Commentaires :

- le système est afocal (voir l'exercice 7) ;
- ce système est un élargisseur de faisceau ($R_2 > R_1$).

Usuellement on utilise seulement deux lentilles, par exemple avec une source laser (ce qui permet au passage de corriger sa légère divergence...)

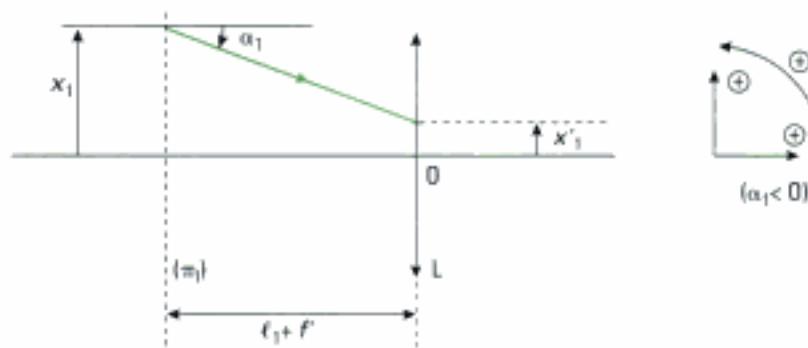
Exercice 18

• Analyse du problème posé

La construction géométrique est une donnée de l'énoncé. Il suffit d'utiliser des considérations géométriques pour aboutir au résultat demandé qui est ici mis sous forme matricielle .

• Mise en équation et résolution :

a) Étude du passage de (π_1) au plan de front de la lentille :



On cherche la matrice $[T_1] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = [T_1] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $x'_1 = a \cdot x_1 + b \cdot \alpha_1$ (1)

$$\alpha_1 = c \cdot x_1 + d \cdot \alpha_1 \Rightarrow c = 1 \text{ et } d = 0 \quad (2)$$

Comme l'angle que fait le rayon lumineux ne change pas lors de ce passage mais que l'ordonnée varie de $(f' + \ell_1) \cdot \tan \alpha_1 \approx (f' + \ell_1) \cdot \alpha_1$ on a donc : $x'_1 = x_1 + (f' + \ell_1) \cdot \alpha_1$ (3)

(1) comparée à (3) donne : $a = 1$ et $b = f' + \ell_1$

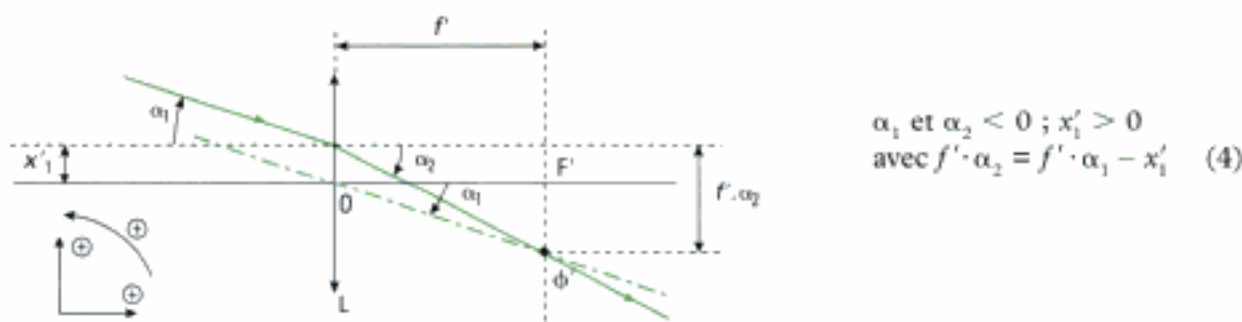
$$\text{soit : } [T_1] = \begin{pmatrix} 1 & f' + \ell_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Étude du passage du plan de front de la lentille à (π_2) :

On cherche une matrice $[T_2]$ telle que : $\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = [T_2] \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$, aussi le problème est analogue au cas

précédent ce qui permet d'écrire : $[T_2] = \begin{pmatrix} 1 & f' + \ell_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Étude de la traversée de la lentille :



$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 < 0 ; x'_1 > 0 \\ \text{avec } f' \cdot \alpha_2 = f' \cdot \alpha_1 - x'_1 \quad (4)$$

Ici on cherche la matrice $[L]$ telle que $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = [L] \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ avec $[L] = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$,

donc : $x'_1 = a' \cdot x'_1 + b' \cdot \alpha_1 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 0$ (5)

$$\alpha_2 = c' \cdot x'_1 + d' \cdot \alpha_1 \quad (6)$$

(4) comparée à (6) donne : $c' = -\frac{1}{f'}$ et $d' = 1$

$$\text{soit : } [L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $[M]$ recherchée, telle que $\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = [M] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$, est égale au produit matriciel $[T_1] \cdot [L] \cdot [T_2]$ qui, après simplification conduit à :

$$[M] = \begin{pmatrix} -\frac{\ell_1}{f'} & f' - \frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{f} \\ -\frac{1}{f'} & -\frac{\ell_2}{f'} \end{pmatrix}$$

Commentaires :

- il n'est pas surprenant d'avoir une relation matricielle car l'approximation de Gauss conduit à des relations linéaires ;
- la méthode matricielle trouve en particulier son intérêt dans les systèmes optiques constitués de n modules identiques : on diagonalise $[M]$ en $[D]$ ce qui permet de déduire facilement $[D]^n$.

Index

A

- Abbe** (nombre d') : 21
- Aberration chromatique** : 84, 85, 167, 169
- Aberrations géométriques** : 85, 87, 92, 118, 151
- Achromat** : 165
- Afocal** : 163, 172
- Airy** (tache d') : 23
- Angle d'incidence** : 31
- Angles** (orientation des) : 81
- Aplanétisme** : 77, 81, 107, 151
- Appareil photographique** : 28
- Approximations trigonométriques** : 80
- Arc-en-ciel** : 51
- Axe optique** : 77

B

- Bessel** (méthode de) : 172
- Biréfringence** : 18

C

- Catadioptr** : 172.
- Cauchy** (loi de) : 18
- Caustique** : 81
- Cavité laser** : 128
- Célérité** : 13, 16
- Centre optique** : 102, 153
- Champ d'un miroir** : 120
- Condenseur** : 172
- Conditions de Gauss** : 79
- Confocale** (cavité) : 128
- Conjugaison** (relation de) : 81
- Construction des images** : 81
- Corpusculaire** : 10
- Crown** : 19

D

- Descartes** (relation de) : 9, 118
- Déviati** : 47
- Diffraction** : 107, 129
- Dioptr** : 35
- Dioptr plan** : 82, 83
- Distance focale** : 154, 172

- Distance hyperfocale** : 173
- Dispersion** : 14, 20
- Doublet** (de lentilles) : 172, 173
- Dualité onde corpuscule** : 10

E

- Eclipse** (de soleil) : 50
- Einstein** : 10
- Elargisseur de faisceau** : 174
- Electrodynamique quantique** : 10
- Espace** : 70, 72, 150
- Euclide** : 30

F

- Faisceau** : 29
- Feynman** : 10
- Fibre optique** : 52
- Fizeau** : 18
- Flint** : 19
- Foucault** : 17
- Foyer** : 36, 82

G

- Galilée** : 17
- Gauss** (conditions de) : 79
- Grandissement** : 77, 81
- Grimaldi** : 28

H

- Hertz** : 10
- Homogène** : 11-13
- Huygens** : 9

I

- Illusion d'optique** : 70
- Incidence** : 30
- Indépendance des rayons lumineux** : 30
- Indice** : 50, 91
- Image** : 71, 114
- Isotrope** : 11

K

Képler (loi de) : 35

L

Lame à faces parallèles : 49, 50
Lentille sphérique : 148, 150, 161, 162, 170
Loupe : 162
Lunette de Galilée : 91
Lumière : 8, 16, 17, 19

M

Malus (théorème de) : 37
Marginaux : 79
Maxwell : 10
Mécanique quantique : 10
Mètre : 18
Michelson : 19
Microscope : 173
Milieu : 11, 12, 14, 30
Miroir équivalent : 174
Miroir plan : 90, 119
Miroir sphérique : 107, 129
Modèle : 9
Monochromatique : 10, 16

N

Newton : 9, 117

O

Objet : 72, 114
Onde : 11, 12, 14, 30, 39
Ondulatoire : 11
Opaque : 9
Optique géométrique : 28, 39, 77
Ouverture : 29

P

Paraxiaux : 79
Période : 13
Phase : 13
Photoélectrique (effet) : 10
Photographique : 172, 173
Photon : 10
Plan d'incidence : 30, 45

Plan focal : 110, 154
Planck (constante de) : 10
Point image : 71
Point objet : 72
Poli optique : 29
Principe : 29
Prisme : 39
Propagation : 29
Punctum proximum : 73
Punctum remotum : 73

R

Rayleigh : 29
Rayon : 14, 298, 71, 79, 103
Récepteur de lumière : 8
Rectiligne (principe de propagation) : 29
Réflexion : 30, 38
Réfraction : 36, 37
Relation de conjugaison : 81
Retour inverse de la lumière : 29
Rétroviseur : 127

S

Snell : 9
Snell - Descartes : 30-34
Sommet (miroir sphérique) : 102
Source : 8, 9
Spectre électromagnétique : 16
Spectroscope : 51
Spéculaire (réflexion) : 38
Stigmatisme : 77, 151
Support (d'un rayon) : 72, 110
Système : 77, 163, 172

T

Téléobjectif : 172
Télescope : 128
Théorie : 9
Translucide : 8
Transparent : 8, 18

V

Vergence : 111, 156
Viseur : 173
Visible :
Vitesse (de la lumière) : 18



Titres disponibles en première année...

En Mathématiques pour les filières MPSI et PCSI

Analyse
Algèbre et géométrie
Exercices

En Chimie pour les filières MPSI, PCSI et PTSI

Chimie

En Physique pour les filières MPSI, PCSI et PTSI

Optique
Mécanique
Électrocinétique
Électromagnétisme
Thermodynamique
Exercices

LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la **collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

Réf. : 209.0345

ISBN : 2 7495 0228 4



Copyrighted material